ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

Автор
Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Логарифмы — одна из самых важных и одновременно самых пугающих тем в школьной математике. Они появляются в 10-11 классах, и у многих учеников начинается паника: новые обозначения, непонятные свойства, странные графики... Но на самом деле логарифмы — это просто другой способ записи знакомых нам показательных уравнений.

В школьных учебниках логарифмические выражения обычно изучаются постепенно: сначала определение, потом свойства, потом преобразования. Но часто эти темы разбросаны по разным параграфам, и ученику трудно увидеть общую картину. Да и задач на отработку каждого свойства обычно не хватает.

В этой книге я собрал все основные приёмы работы с логарифмическими выражениями в одном месте:

- определение логарифма и простейшие свойства;
- основное логарифмическое тождество;
- логарифм произведения, частного, степени, корня;
- переход к новому основанию;
- упрощение выражений с одним и несколькими логарифмами;
- приведение к одному основанию;
- выражения с натуральными логарифмами;
- доказательство тождеств;
- сравнение логарифмов.

Каждой группе свойств посвящена отдельная глава с теорией, подробными примерами и большим количеством задач. После каждого логического блока есть обобщающая глава-практика, а в конце — итоговая глава «Практика на все-все приёмы», где собраны задачи всех типов вперемешку.

Особое внимание в книге уделяется не механическому запоминанию формул, а пониманию логики их вывода и связей между ними. Я показываю, как все свойства выводятся из определения логарифма, и учу применять их в различных комбинациях.

Эта книга пригодится не только моим ученикам, но и всем, кто хочет разобраться в теме самостоятельно. А ещё я буду рад, если другие репетиторы станут использовать её на своих занятиях — берите свободно, пользуйтесь, задавайте побольше примеров своим ученикам.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть и другие пособия по математике и физике — всё, что я наработал за годы преподавания, а также научно-популярные книги, написанные мною для тех учеников, которые хотят знать больше про историю науки и окружающий мир.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если вам или вашему ребёнку нужна помощь — милости прошу!

Удачи в изучении математики!

Дмитрий Трепачёв

Оглавление

Уравнение $\log_a x = b$

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшие логарифмические уравнения — уравнения вида $\log_a x = b$, где a и b — известные числа, а x — неизвестное.

Определение логарифма:

$$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x$$

при условии $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Решение:

1. Записываем ОДЗ: $x > 0$.
2. По определению логарифма, $x = a^b$.
3. Полученное значение автоматически положительно (при $a > 0$), поэтому проверка ОДЗ обычно не требуется, но убедиться стоит.

Важно: Уравнение $\log_a x = b$ всегда имеет единственное решение при любом b, так как показательная функция a^b определена для любого b.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое уравнение

Решим уравнение:

$$\log_2 x = 3$$

ОДЗ: $x > 0$.
По определению логарифма, $x = 2^3 = 8$.
Проверка ОДЗ: $8 > 0$ — выполняется.
Ответ: $x = 8$.

Пример 2

Уравнение с дробным ответом

Решим уравнение:

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = 3^{1/2} = \sqrt{3}$.
Ответ: $x = \sqrt{3}$.

Пример 3

Уравнение с отрицательным b

Решим уравнение:

$$\log_5 x = -2$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.
Ответ: $x = \frac{1}{25}$.

Пример 4

Уравнение с иррациональным b

Решим уравнение:

$$\log_2 x = \sqrt{2}$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = 2^{\sqrt{2}}$.
Ответ: $x = 2^{\sqrt{2}}$.

Пример 5

Уравнение с основанием меньше 1

Решим уравнение:

$$\log_{0.5} x = 3$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = (0.5)^3 = 0.125 = \frac{1}{8}$.
Ответ: $x = \frac{1}{8}$.

Пример 6

Уравнение с основанием — дробью

Решим уравнение:

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -2$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$.
Ответ: $x = 9$.

Пример 7

Проверка ОДЗ

Решим уравнение:

$$\log_2 x = 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
$x = 2^0 = 1$, что удовлетворяет ОДЗ.
Ответ: $x = 1$.

Пример 8

Общий случай

Для уравнения $\log_a x = b$ ответ всегда $x = a^b$, и он автоматически положителен при $a > 0$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\log_2 x = 3$ **4)** $\log_7 x = 1$ **7)** $\log_4 x = 1$ **10)** $\log_3 x = -2$

2) $\log_3 x = 2$ **5)** $\log_2 x = 0$ **8)** $\log_6 x = 2$ **11)** $\log_4 x = -3$

3) $\log_5 x = 4$ **6)** $\log_3 x = 0$ **9)** $\log_2 x = -1$ **12)** $\log_5 x = -4$

2. Решите уравнения:

1) $\log_2 x = \frac{1}{2}$ **4)** $\log_5 x = \frac{1}{4}$ **7)** $\log_4 x = \frac{5}{2}$ **10)** $\log_3 x = -\frac{2}{3}$

2) $\log_3 x = \frac{1}{3}$ **5)** $\log_2 x = \frac{3}{2}$ **8)** $\log_5 x = \frac{3}{4}$ **11)** $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$ **6)** $\log_3 x = \frac{2}{3}$ **9)** $\log_2 x = -\frac{1}{2}$ **12)** $\log_5 x = -\frac{4}{5}$

3. Решите уравнения с десятичными и натуральными логарифмами:

1) $\lg x = 2$

2) $\lg x = -1$

3) $\lg x = 0.5$

4) $\lg x = -0.3$

5) $\ln x = 1$

6) $\ln x = -2$

7) $\ln x = \frac{1}{2}$

8) $\ln x = -\frac{3}{2}$

9) $\log_{10} x = 3$

10) $\log_{10} x = -4$

11) $\log_e x = 2$

12) $\log_e x = -1$

4. Решите уравнения с основанием — правильной дробью:

1) $\log_{0.5} x = 2$

2) $\log_{0.5} x = -1$

3) $\log_{0.2} x = 3$

4) $\log_{0.2} x = -2$

5) $\log_{0.1} x = 1$

6) $\log_{0.1} x = -3$

7) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

8) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$

9) $\log_{\frac{1}{4}} x = 0.5$

10) $\log_{\frac{1}{4}} x = -0.5$

11) $\log_{\frac{2}{3}} x = 2$

12) $\log_{\frac{2}{3}} x = -1$

5. Найдите x из равенства:

1) $\log_2 x = \log_2 3$

2) $\log_3 x = \log_3 7$

3) $\log_5 x = \log_5 2$

4) $\log_2 x = \log_2 5 + 1$

5) $\log_3 x = \log_3 4 - 2$

6) $\log_4 x = 2\log_4 3$

7) $\log_6 x = \frac{1}{2}\log_6 25$

8) $\log_7 x = 3\log_7 2 + \log_7 5$

9) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 4 - \log_2 5$

10) $\log_3 x = \log_3 8 - \frac{1}{3}\log_3 27$

11) $\log_5 x = 2\log_5 2 + \frac{1}{2}\log_5 9$

12) $\log_4 x = \frac{3}{2}\log_4 16 - \frac{1}{2}\log_4 4$

6. При каких значениях a уравнение имеет решение?

1) $\log_2 x = a$

2) $\log_3 x = a$

3) $\log_{0.5} x = a$

4) $\lg x = a$

5) $\ln x = a$

6) $\log_a x = 2$ (здесь a — основание, найдите x)

7) $\log_a x = -1$

8) $\log_a x = 0$

9) $\log_a x = \frac{1}{2}$

Уравнения вида $\log_a f(x) = b$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, где под знаком логарифма стоит не просто x, а некоторое выражение $f(x)$. Такие уравнения решаются по тому же принципу, но с обязательным учётом области допустимых значений.

Общий вид:

$$\log_a f(x) = b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b — известное число, $f(x)$ — некоторое выражение, зависящее от x.

Метод решения:

1. Записываем ОДЗ: $f(x) > 0$.
2. По определению логарифма: $f(x) = a^b$.
3. Решаем полученное уравнение $f(x) = a^b$.
4. Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни ОДЗ.
5. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Линейная функция под логарифмом

Решим уравнение:

$$\log_2(x-3) = 4$$

ОДЗ: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$.

По определению: $x - 3 = 2^4 = 16$. Отсюда $x = 16 + 3 = 19$.

Проверяем ОДЗ: $19 > 3$ — выполняется.

Ответ: $x = 19$.

Пример 2

Квадратичная функция под логарифмом

Решим уравнение:

$$\log_3(x^2 - 5x + 7) = 1$$

ОДЗ: $x^2 - 5x + 7 > 0$. Дискриминант $D = 25 - 28 = -3 < 0$, ветви параболы вверх, значит неравенство выполняется при всех x. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

По определению: $x^2 - 5x + 7 = 3^1 = 3$.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Проверяем ОДЗ: оба корня подходят (ОДЗ — все числа).

Ответ: $x = 1$, $x = 4$.

Пример 3

Корни, не проходящие ОДЗ

Решим уравнение:

$$\log_2(x^2 - 3x) = 3$$

ОДЗ: $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

По определению: $x^2 - 3x = 2^3 = 8$.

$$x^2 - 3x - 8 = 0$$
$$D = 9 + 32 = 41$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

Проверяем ОДЗ: $\frac{3+\sqrt{41}}{2} \approx \frac{3+6.4}{2} = 4.7$ — входит в $(3; +\infty)$ — подходит. $\frac{3-\sqrt{41}}{2} \approx \frac{3-6.4}{2} = -1.7$ — входит в $(-\infty; 0)$ — подходит.

Ответ: $x = \frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$.

Пример 4

Корень не проходит ОДЗ

Решим уравнение:

$$\log_3(x^2 - 4x + 3) = 2$$

ОДЗ: $x^2 - 4x + 3 > 0$. Корни: $x = 1$, $x = 3$. Ветви вверх, значит $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

По определению: $x^2 - 4x + 3 = 3^2 = 9$.

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$
$$D = 16 + 24 = 40$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 2 \pm \sqrt{10}$$

$\sqrt{10} \approx 3.16$, поэтому: $x_1 = 2 + \sqrt{10} \approx 5.16$ — входит в $(3; +\infty)$ — подходит. $x_2 = 2 - \sqrt{10} \approx -1.16$ — входит в $(-\infty; 1)$ — подходит.

Ответ: $x = 2 \pm \sqrt{10}$.

Пример 5

Уравнение с корнем в правой части

Решим уравнение:

$$\log_2(x + 1) = \frac{1}{2}$$

ОДЗ: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$.

По определению: $x + 1 = 2^{1/2} = \sqrt{2}$.

$$x = \sqrt{2} - 1 \approx 1.414 - 1 = 0.414$$

Проверяем ОДЗ: $0.414 > -1$ — выполняется.

Ответ: $x = \sqrt{2} - 1$.

Пример 6

Уравнение с отрицательным b

Решим уравнение:

$$\log_3(2x - 1) = -2$$

ОДЗ: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0.5$.

По определению: $2x - 1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

$$2x = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$
$$x = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

Проверяем ОДЗ: $0.556 > 0.5$ — выполняется.

Ответ: $x = \frac{5}{9}$.

Пример 7

Уравнение с основанием меньше 1

Решим уравнение:

$$\log_{0.5}(x-2) = 3$$

ОДЗ: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.
По определению: $x - 2 = (0.5)^3 = 0.125$.

$$x = 2.125$$

Проверяем ОДЗ: $2.125 > 2$ — выполняется.
Ответ: $x = 2.125$.

Пример 8

Уравнение с дробным основанием и отрицательным b

Решим уравнение:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+4) = -2$$

ОДЗ: $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$.
По определению: $x + 4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$.

$$x = 5$$

Проверяем ОДЗ: $5 > -4$ — выполняется.
Ответ: $x = 5$.

Задачи

1. Решите уравнения (линейная функция под логарифмом):

1) $\log_2(x-1) = 3$

2) $\log_3(x+2) = 2$

3) $\log_5(x-3) = 1$

4) $\log_7(x+4) = 0$

5) $\log_2(2x-1) = 4$

6) $\log_3(3x+2) = 2$

7) $\log_4(5x-2) = 1$

8) $\log_6(4x+3) = 2$

9) $\log_2(x+5) = -1$

10) $\log_3(x-2) = -2$

11) $\log_5(2x+3) = -3$

12) $\log_4(3x-1) = -2$

2. Решите уравнения (квадратичная функция под логарифмом):

1) $\log_2(x^2-3x+2) = 1$

2) $\log_3(x^2-4x+3) = 2$

3) $\log_5(x^2-5x+6) = 1$

4) $\log_4(x^2-6x+8) = 2$

5) $\log_2(x^2-2x-3) = 3$

6) $\log_3(x^2-2x-8) = 2$

7) $\log_5(x^2+4x+3) = 1$

8) $\log_4(x^2+5x+4) = 2$

9) $\log_2(x^2+6x+8) = 3$

10) $\log_3(x^2+7x+10) = 2$

11) $\log_5(x^2-4x+4) = 0$

12) $\log_4(x^2-6x+9) = 1$

3. Найдите ОДЗ и решите уравнения:

1) $\log_2(x^2-4) = 2$

2) $\log_3(x^2-9) = 3$

3) $\log_5(x^2-16) = 2$

4) $\log_2(x^2-2x) = 3$

5) $\log_3(x^2-3x) = 2$

6) $\log_4(x^2-4x) = 1$

7) $\log_2\dfrac{x-1}{x+2} = 1$

8) $\log_3\dfrac{x+1}{x-2} = 2$

9) $\log_5\dfrac{2x-1}{x+3} = 0$

10) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$

11) $\log_3\sqrt{x+2} = 2$

12) $\log_4\sqrt[3]{x-1} = 1$

4. Решите уравнения (с дробными и отрицательными b):

1) $\log_2(x+3) = \frac{1}{2}$

2) $\log_3(x-1) = \frac{1}{3}$

3) $\log_5(x+2) = \frac{3}{2}$

4) $\log_2(x-4) = -\frac{1}{2}$

5) $\log_3(x+5) = -\frac{2}{3}$

6) $\log_4(x-2) = -\frac{3}{2}$

7) $\log_2(3x-1)=\frac{2}{3}$

8) $\log_3(2x+1)=\frac{3}{4}$

9) $\log_5(4x-3)=\frac{1}{2}$

10) $\log_2(5x+2)=-\frac{3}{5}$

11) $\log_3(6x-5)=-\frac{2}{3}$

12) $\log_4(7x+3)=-\frac{1}{4}$

5. Решите уравнения с основанием — правильной дробью:

1) $\log_{0.5}(x-2)=2$

2) $\log_{0.5}(x+1)=-1$

3) $\log_{0.2}(x-3)=2$

4) $\log_{0.2}(x+4)=-2$

5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=3$

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x+5)=-2$

7) $\log_{\frac{1}{4}}(3x-2)=1$

8) $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)=-1$

9) $\log_{\frac{2}{3}}(x+2)=2$

10) $\log_{\frac{2}{3}}(2x-3)=-1$

11) $\log_{0.1}(5x+1)=2$

12) $\log_{0.1}(3x-2)=-2$

6. При каких значениях параметра a уравнение имеет решение?

1) $\log_2(x-a)=3$

2) $\log_3(x+a)=2$

3) $\log_5(ax-1)=1$

4) $\log_2(x^2-a)=1$

5) $\log_3(ax^2-4)=2$

6) $\log_a x=2$ (найдите x через a)

7) $\log_a(x-1)=3$

8) $\log_a(x^2-4)=1$

9) $\log_a(2x+1)=-1$

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, где логарифмы с одинаковыми основаниями стоят в обеих частях равенства. Такие уравнения решаются методом потенцирования.

Общий вид:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые выражения.

Метод решения:

1. Записываем ОДЗ: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
2. Потенцируем (убираем логарифмы): $f(x) = g(x)$.
3. Решаем полученное уравнение.
4. Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни ОДЗ.
5. Записываем ответ.

Важное замечание: Потенцирование — это равносильное преобразование только при выполнении ОДЗ. Поэтому проверка обязательна!

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простейший случай

Решим уравнение:

$$\log_2(x+3) = \log_2(7-x)$$

ОДЗ: $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ и $7-x > 0 \Rightarrow x < 7$. Объединяя, получаем $x \in (-3; 7)$.

Потенцируем: $x+3 = 7-x$.

$$x + x = 7 - 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Проверяем ОДЗ: $2 \in (-3; 7)$ — подходит.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2

Квадратные выражения под логарифмами

Решим уравнение:

$$\log_2(x^2 - 4x + 4) = \log_2(x - 2)$$

ОДЗ: $x^2 - 4x + 4 > 0$ и $x - 2 > 0$. Заметим, что $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Это выражение положительно при всех $x \neq 2$, и равно нулю при $x = 2$. Значит, первое условие: $x \neq 2$. Второе: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Объединяя, получаем $x > 2$.

Потенцируем: $(x-2)^2 = x - 2$. Пусть $t = x - 2$, тогда $t^2 = t$.

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t-1) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{или} \quad t = 1$$

Возвращаемся: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ (не подходит по ОДЗ, так как $x > 2$). $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ (подходит, $3 > 2$).

Ответ: $x = 3$.

Пример 3

Корень не проходит ОДЗ

Решим уравнение:

$$\log_3(x^2-1)=\log_3(2x+2)$$

ОДЗ: $x^2-1>0 \Rightarrow (x-1)(x+1)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. $2x+2>0 \Rightarrow 2(x+1)>0 \Rightarrow x>-1$. Объединяя: $x>1$ (пересечение $(1;+\infty)$ с $x>-1$ даёт $(1;+\infty)$).

Потенцируем: $x^2-1=2x+2$.

$$x^2-2x-3=0$$

$$D=4+12=16$$

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-1,\quad x_2=\frac{2+4}{2}=3$$

Проверяем ОДЗ: $x=-1$ не подходит (не входит в $x>1$). $x=3$ подходит.

Ответ: $x=3$.

Пример 4

Дробные выражения

Решим уравнение:

$$\log_2\frac{x-1}{x+2}=\log_2\frac{x+1}{x-3}$$

ОДЗ: $\frac{x-1}{x+2}>0$ и $\frac{x+1}{x-3}>0$, а также знаменатели не равны нулю: $x\neq-2$, $x\neq3$.

Решим каждое неравенство методом интервалов.

Для $\frac{x-1}{x+2}>0$: нули числителя $x=1$, знаменателя $x=-2$. Решение: $x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Для $\frac{x+1}{x-3}>0$: нули числителя $x=-1$, знаменателя $x=3$. Решение: $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Объединяя (находим пересечение): $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Потенцируем: $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{x-3}$. Перемножаем крест-накрест:

$$(x-1)(x-3)=(x+1)(x+2)$$

$$x^2-4x+3=x^2+3x+2$$

$$-4x+3=3x+2$$

$$-4x-3x=2-3$$

$$-7x=-1$$

$$x=\frac{1}{7}\approx0.143$$

Проверяем ОДЗ: $\frac{1}{7}$ не входит ни в $(-\infty;-2)$, ни в $(3;+\infty)$. Значит, корень не подходит.

Ответ: решений нет.

Пример 5

Уравнение с произведением

Решим уравнение:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=\log_2(x+7)$$

Сначала преобразуем левую часть: $\log_2(x-1)+\log_2(x+3)=\log_2((x-1)(x+3))$.

Получаем: $\log_2((x-1)(x+3))=\log_2(x+7)$.

ОДЗ: $x-1>0 \Rightarrow x>1$, $x+3>0 \Rightarrow x>-3$, $x+7>0 \Rightarrow x>-7$. Объединяя, $x>1$.

Потенцируем: $(x-1)(x+3)=x+7$.

$$x^2+3x-x-3=x+7$$

$$x^2+2x-3=x+7$$

$$x^2+x-10=0$$

$$D=1+40=41$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$$

$\sqrt{41} \approx 6.4$, поэтому: $x_1 = \frac{-1+6.4}{2} = \frac{5.4}{2} = 2.7$ — подходит (> 1). $x_2 = \frac{-1-6.4}{2} = \frac{-7.4}{2} = -3.7$ — не подходит (< 1).

Ответ: $x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Пример 6

Уравнение с вычитанием логарифмов

Решим уравнение:

$$\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = \log_3 4$$

Преобразуем левую часть: $\log_3 \frac{x+2}{x-1} = \log_3 4$.
ОДЗ: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$, $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Итого $x > 1$.
Потенцируем: $\frac{x+2}{x-1} = 4$.

$$x + 2 = 4(x-1)$$

$$x + 2 = 4x - 4$$

$$2 + 4 = 4x - x$$

$$6 = 3x$$

$$x = 2$$

Проверяем ОДЗ: $2 > 1$ — подходит.
Ответ: $x = 2$.

Пример 7

Уравнение с корнями

Решим уравнение:

$$\log_2 \sqrt{x-1} = \log_2(x-3)$$

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ и $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$. Итого $x > 3$.
Потенцируем: $\sqrt{x-1} = x - 3$. Возводим в квадрат: $x - 1 = (x-3)^2$.

$$x - 1 = x^2 - 6x + 9$$

$$0 = x^2 - 7x + 10$$

$$D = 49 - 40 = 9$$

$$x_1 = \frac{7-3}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

Проверяем ОДЗ: $x = 2$ не подходит ($2 > 3$? нет). $x = 5$ подходит ($5 > 3$). Также нужно проверить, не появились ли лишние корни при возведении в квадрат. Подставим $x = 5$ в исходное уравнение: $\log_2 \sqrt{4} = \log_2 2 = 1$, $\log_2(5-3) = \log_2 2 = 1$ — верно.

Ответ: $x = 5$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\log_2(x+1) = \log_2 3$

2) $\log_3(x-2) = \log_3 5$

3) $\log_5(2x+1) = \log_5 7$

4) $\log_2(x+3) = \log_2(2x-1)$

5) $\log_3(4x-1) = \log_3(x+5)$

6) $\log_5(3x+2) = \log_5(x+4)$

7) $\log_2(x^2-4) = \log_2(x+2)$

8) $\log_3(x^2-9) = \log_3(x-3)$

9) $\log_5(x^2-16) = \log_5(x-4)$

10) $\log_2(x^2-3x) = \log_2(x-3)$

11) $\log_3(x^2-5x) = \log_3(2x-10)$

12) $\log_5(x^2+x) = \log_5(x+1)$

2. Найдите ОДЗ и решите уравнения:

1) $\log_2(x-3)=\log_2(x+1)$

2) $\log_3(x+4)=\log_3(2x-3)$

3) $\log_5(3x-1)=\log_5(x+7)$

4) $\log_2\dfrac{x-1}{x+2}=\log_2\dfrac{x+1}{x-2}$

5) $\log_3\dfrac{x+2}{x-3}=\log_3\dfrac{x-1}{x+4}$

6) $\log_5\dfrac{2x-1}{x+3}=\log_5\dfrac{x+2}{3x-1}$

7) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=\log_2 6$

8) $\log_3(x+1)+\log_3(x-2)=\log_3 4$

9) $\log_5(x-1)+\log_5(x+3)=\log_5 8$

10) $\log_2(x-2)-\log_2(x+1)=\log_2 0.5$

11) $\log_3(x+3)-\log_3(x-1)=\log_3 2$

12) $\log_5(2x-1)-\log_5(x+2)=\log_5 3$

3. Решите уравнения (с корнями и степенями):

1) $\log_2\sqrt{x-1}=\log_2 3$

2) $\log_3\sqrt{x+2}=\log_3 2$

3) $\log_5\sqrt[3]{x-2}=\log_5 4$

4) $\log_2\sqrt{x^2-4}=\log_2(x-2)$

5) $\log_3\sqrt{x^2-9}=\log_3(x-3)$

6) $\log_5\sqrt{x^2-16}=\log_5(x-4)$

7) $\log_2(x-1)^2=\log_2(x+3)$

8) $\log_3(x+2)^2=\log_3(5x-2)$

9) $\log_5(2x-1)^2=\log_5(x+4)$

10) $\log_2\frac{1}{x-1}=\log_2\frac{2}{x+3}$

11) $\log_3\frac{2}{x+1}=\log_3\frac{3}{x-2}$

12) $\log_5\frac{x-2}{x+3}=\log_5\frac{x+1}{x-4}$

4. Решите уравнения (с заменой переменной):

1) $\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$

2) $\log_3^2 x-\log_3 x-6=0$

3) $\log_5^2 x-2\log_5 x-3=0$

4) $\log_2^2(x-1)-3\log_2(x-1)+2=0$

5) $\log_3^2(x+1)-2\log_3(x+1)-3=0$

6) $\log_5^2(2x-1)-\log_5(2x-1)-2=0$

7) $\log_2 x+\log_4 x=3$

8) $\log_3 x+\log_9 x=2$

9) $\log_5 x+\log_{25} x=\frac{3}{2}$

10) $\log_2 x\cdot\log_2\frac{x}{4}=3$

11) $\log_3 x\cdot\log_3\frac{x}{9}=2$

12) $\log_5 x\cdot\log_5\frac{x}{25}=1$

5. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$

2) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$

3) $\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=1$

4) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$

5) $\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=2$

6) $\log_5(x-3)+\log_5(x+3)=2$

7) $\log_2(x^2-4)-\log_2(x-2)=3$

8) $\log_3(x^2-9)-\log_3(x-3)=2$

9) $\log_5(x^2-16)-\log_5(x-4)=2$

10) $\log_2(x+2)-\log_2(x-2)=\log_2 3$

11) $\log_3(x+3)-\log_3(x-3)=\log_3 2$

12) $\log_5(2x+1)-\log_5(x-2)=\log_5 4$

Уравнения, сводящиеся к простейшим заменой переменной

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, которые с помощью замены переменной сводятся к квадратным или другим простейшим уравнениям. Чаще всего это уравнения вида $A(\log_a x)^2 + B\log_a x + C = 0$.

Общий вид:

$$A\log_a^2 x + B\log_a x + C = 0$$

или более общий случай:

$$A\log_a^2 f(x) + B\log_a f(x) + C = 0$$

Метод решения:

1. Делаем замену $t = \log_a x$ (или $t = \log_a f(x)$).
2. Получаем квадратное уравнение $At^2 + Bt + C = 0$.
3. Решаем его относительно t.
4. Для каждого найденного t решаем уравнение $\log_a x = t$ (или $\log_a f(x) = t$) с учётом ОДЗ.
5. Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни ОДЗ исходного уравнения.
6. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое квадратное уравнение

Решим уравнение:

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
Делаем замену $t = \log_2 x$. Получаем:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Возвращаемся к x:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

Проверяем ОДЗ: $2 > 0$, $4 > 0$ — подходят.
Ответ: $x = 2$, $x = 4$.

Пример 2

Уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение:

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x + 5 = 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
Замена $t = \log_3 x$:

$$t^2 - 2t + 5 = 0$$

$$D = 4 - 20 = -16 < 0$$

Дискриминант отрицательный, значит, действительных корней нет.
Ответ: решений нет.

Пример 3

Корни, не проходящие по ОДЗ после возврата

Решим уравнение:

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
Замена $t = \log_2 x$:

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Возвращаемся:

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$$

Оба корня положительны, ОДЗ выполняется.
Ответ: $x = \frac{1}{2}$, $x = 4$.

Пример 4

Уравнение с выражением под логарифмом

Решим уравнение:

$$\log_3^2(x-1) - 2\log_3(x-1) - 3 = 0$$

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.
Делаем замену $t = \log_3(x-1)$:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Возвращаемся:

$$\log_3(x-1) = -1 \Rightarrow x - 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\log_3(x-1) = 3 \Rightarrow x - 1 = 3^3 = 27 \Rightarrow x = 28$$

Проверяем ОДЗ: $\frac{4}{3} > 1$, $28 > 1$ — подходят.
Ответ: $x = \frac{4}{3}$, $x = 28$.

Пример 5

Уравнение с суммой логарифмов, сводящееся к квадратному

Решим уравнение:

$$\log_2 x + \log_4 x = 3$$

Приведём второй логарифм к основанию 2: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.
ОДЗ: $x > 0$.
Получаем: $\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 3$. Умножаем на 2: $2\log_2 x + \log_2 x = 6 \Rightarrow 3\log_2 x = 6 \Rightarrow \log_2 x = 2$.
Отсюда $x = 2^2 = 4$.
Ответ: $x = 4$.

Пример 6

Уравнение с произведением логарифмов

Решим уравнение:

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{4} = 3$$

ОДЗ: $x > 0$.
Заметим, что $\log_2 \frac{x}{4} = \log_2 x - \log_2 4 = \log_2 x - 2$.

Пусть $t = \log_2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t(t-2) = 3$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad t_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Возвращаемся:

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$$

Проверяем ОДЗ: оба корня положительны.
Ответ: $x = \frac{1}{2}, x = 8$.

Пример 7

Уравнение с разными основаниями, сводящееся к замене

Решим уравнение:

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 6$$

ОДЗ: $x > 0$.
Приведём все логарифмы к основанию 2: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{2}, \log_8 x = \frac{\log_2 x}{3}$.
Пусть $t = \log_2 x$. Тогда:

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 6$$

$$t\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 6$$

$$t \cdot \frac{6+3+2}{6} = 6$$

$$t \cdot \frac{11}{6} = 6$$

$$t = 6 \cdot \frac{6}{11} = \frac{36}{11}$$

Тогда $x = 2^{36/11}$.
Ответ: $x = 2^{36/11}$.

Пример 8

Биквадратное уравнение относительно логарифма

Решим уравнение:

$$\log_2^4 x - 5\log_2^2 x + 4 = 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
Делаем замену $t = \log_2^2 x$ (обратите внимание: это квадрат логарифма, а не логарифм квадрата). Тогда $t \geq 0$.
Уравнение: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{5-3}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Возвращаемся: $\log_2^2 x = 1 \Rightarrow \log_2 x = \pm 1$. $\log_2^2 x = 4 \Rightarrow \log_2 x = \pm 2$.
Получаем четыре уравнения:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Все корни положительны.
Ответ: $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4$.

Задачи

1. Решите уравнения (замена $t = \log_a x$):

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

2) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$

3) $\log_5^2 x - 2\log_5 x - 3 = 0$

4) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$

5) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0$

6) $\log_5^2 x - \log_5 x - 6 = 0$

7) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$

8) $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$

9) $\log_5^2 x - 6\log_5 x + 5 = 0$

10) $2\log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 = 0$

11) $3\log_3^2 x - 4\log_3 x + 1 = 0$

12) $4\log_5^2 x - 5\log_5 x + 1 = 0$

2. Решите уравнения (замена $t = \log_a f(x)$):

1) $\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) + 2 = 0$

2) $\log_3^2(x+2) - 2\log_3(x+2) - 3 = 0$

3) $\log_5^2(x-2) - 4\log_5(x-2) + 3 = 0$

4) $\log_2^2(x+1) + \log_2(x+1) - 2 = 0$

5) $\log_3^2(x-3) + 3\log_3(x-3) + 2 = 0$

6) $\log_5^2(2x-1) - 2\log_5(2x-1) - 8 = 0$

7) $\log_2^2(x^2-1) - 3\log_2(x^2-1) + 2 = 0$

8) $\log_3^2(x^2-4) - 2\log_3(x^2-4) - 3 = 0$

9) $\log_5^2(x^2-9) - 4\log_5(x^2-9) + 3 = 0$

3. Решите уравнения с приведением к общему основанию:

1) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

2) $\log_2 x + \log_8 x = 4$

3) $\log_3 x + \log_9 x = 2$

4) $\log_3 x + \log_{27} x = 2$

5) $\log_5 x + \log_{25} x = 2$

6) $\log_5 x + \log_{125} x = 2$

7) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 6$

8) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 6$

9) $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{125} x = 6$

10) $\log_2 x + \log_4 x = \log_2 12$

11) $\log_3 x + \log_9 x = \log_3 18$

12) $\log_5 x + \log_{25} x = \log_5 20$

4. Решите уравнения с произведением логарифмов:

1) $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{2} = 2$

2) $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{4} = 3$

3) $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = 4$

4) $\log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{3} = 2$

5) $\log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{9} = 3$

6) $\log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{27} = 4$

7) $\log_5 x \cdot \log_5 \frac{x}{5} = 2$

8) $\log_5 x \cdot \log_5 \frac{x}{25} = 3$

9) $\log_5 x \cdot \log_5 \frac{x}{125} = 4$

10) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3 = 0$ (подсказка: $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$)

11) $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x^3 + 5 = 0$

12) $(\log_5 x)^2 - 3\log_5 x^2 + 2 = 0$

5. Решите биквадратные уравнения:

1) $\log_2^4 x - 5\log_2^2 x + 4 = 0$

2) $\log_3^4 x - 10\log_3^2 x + 9 = 0$

3) $\log_5^4 x - 13\log_5^2 x + 36 = 0$

4) $\log_2^4 x - 2\log_2^2 x - 8 = 0$

5) $\log_3^4 x - 3\log_3^2 x - 10 = 0$

6) $\log_5^4 x - 4\log_5^2 x - 12 = 0$

7) $\log_2^4(x-1) - 5\log_2^2(x-1) + 4 = 0$

8) $\log_3^4(x+2) - 10\log_3^2(x+2) + 9 = 0$

9) $\log_5^4(x-2) - 13\log_5^2(x-2) + 36 = 0$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \log_2 3$

2) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \log_3 4$

3) $\log_5 x + \log_{25} x + \log_{125} x = \log_5 6$

4) $\log_2 x \cdot \log_4 x = 2$

5) $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

6) $\log_5 x \cdot \log_{25} x = 2$

7) $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 6$

8) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x = 6$

9) $\log_5 x \cdot \log_{25} x \cdot \log_{125} x = 6$

10) $\log_2^2 x + \log_2 x^2 - 3 = 0$

11) $\log_3^2 x + 2\log_3 x^3 - 7 = 0$

12) $\log_5^2 x - 3\log_5 x^5 + 4 = 0$

Практика по блоку 1

Теория

В этом блоке мы изучили простейшие логарифмические уравнения:

- $\log_a x = b$ — решение по определению (глава 1)
- $\log_a f(x) = b$ — с учётом ОДЗ (глава 2)
- $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ — метод потенцирования (глава 3)
- Уравнения, сводящиеся к квадратным заменой переменной (глава 4)

Во всех этих уравнениях важно помнить про ОДЗ: выражения под логарифмами должны быть положительными, а основание логарифма должно удовлетворять условиям $a > 0$, $a \neq 1$.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить, к какому типу относится уравнение, и применить нужный метод.

Задачи

1. Решите уравнения вида $\log_a x = b$:

1) $\log_2 x = 4$ **2)** $\log_3 x = 2$ **3)** $\log_5 x = -1$ **4)** $\log_7 x = 0$ **5)** $\lg x = 3$ **6)** $\lg x = -2$ **7)** $\ln x = 1$ **8)** $\ln x = -3$ **9)** $\log_{0.5} x = 2$ **10)** $\log_{0.2} x = -1$ **11)** $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$ **12)** $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

2. Решите уравнения вида $\log_a f(x) = b$:

1) $\log_2(x-3) = 3$ **2)** $\log_3(x+4) = 2$ **3)** $\log_5(2x-1) = 1$ **4)** $\log_7(3x+2) = 0$ **5)** $\log_2(x^2-4) = 2$ **6)** $\log_3(x^2-5x+7) = 1$ **7)** $\log_4(x^2-3x) = 2$ **8)** $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ **9)** $\log_3\sqrt[3]{x+2} = 2$ **10)** $\log_5\dfrac{x-2}{x+1} = 0$ **11)** $\log_2\dfrac{2x-1}{x+3} = 1$ **12)** $\log_3\dfrac{x+1}{x-2} = -1$

3. Решите уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$:

1) $\log_2(x+1) = \log_2 3$ **2)** $\log_3(x-2) = \log_3(2x-5)$ **3)** $\log_5(x+3) = \log_5(x^2-3)$ **4)** $\log_2(x^2-4) = \log_2(x+2)$ **5)** $\log_3(x^2-9) = \log_3(x-3)$ **6)** $\log_5\dfrac{x-1}{x+2} = \log_5\dfrac{x+1}{x-2}$ **7)** $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = \log_2 6$ **8)** $\log_3(x+1) - \log_3(x-2) = \log_3 2$ **9)** $\log_5(x-2) + \log_5(x+3) = \log_5 10$ **10)** $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$ **11)** $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$ **12)** $\log_5(x-2) + \log_5(x-3) = 1$

4. Решите уравнения, сводящиеся к квадратным заменой переменной:

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ **2)** $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$ **3)** $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$ **4)** $\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) + 2 = 0$ **5)** $\log_3^2(x+2) - 2\log_3(x+2) - 3 = 0$ **6)** $\log_5^2(x-2) - 4\log_5(x-2) + 3 = 0$ **7)** $\log_2 x + \log_4 x = 3$ **8)** $\log_3 x + \log_9 x = 2$ **9)** $\log_5 x + \log_{25} x = 2$ **10)** $\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{4} = 3$ **11)** $\log_3 x \cdot \log_3 \frac{x}{9} = 2$ **12)** $\log_5 x \cdot \log_5 \frac{x}{25} = 1$

5. Найдите ОДЗ и решите уравнения (смешанные):

1) $\log_2(x^2-3x)=2$

2) $\log_3(x^2-4x)=1$

3) $\log_5(x^2-5x+6)=1$

4) $\log_2(x-1)=\log_2(3-x)$

5) $\log_3(x+2)=\log_3(4-x)$

6) $\log_5(2x-1)=\log_5(x+3)$

7) $\log_2(x^2-4)=\log_2(x-2)$

8) $\log_3(x^2-9)=\log_3(x+3)$

9) $\log_5(x^2-16)=\log_5(x-4)$

10) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)=\log_2 4$

11) $\log_3(x+1)-\log_3(x-1)=\log_3 2$

12) $\log_5(2x-1)-\log_5(x+2)=\log_5 3$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=5$

2) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5$

3) $\log_5 x+\log_{25} x+\log_{125} x=5$

4) $\log_2 x\cdot\log_4 x=2$

5) $\log_3 x\cdot\log_9 x=2$

6) $\log_5 x\cdot\log_{25} x=2$

7) $\log_2^2 x-\log_2 x^2-3=0$

8) $\log_3^2 x-2\log_3 x^3+5=0$

9) $\log_5^2 x-3\log_5 x^5+4=0$

10) $\log_2(x+1)+\log_2(x+2)=\log_2(x+3)$

11) $\log_3(x-1)+\log_3(x-2)=\log_3(x-3)$

12) $\log_5(x-2)+\log_5(x-3)=\log_5(x-4)$

Приведение к одному основанию

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, в которых логарифмы имеют разные основания. Основной метод решения — привести все логарифмы к одному основанию, используя формулу перехода.

Формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Полезные частные случаи:

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
- $\log_a b^n = n \log_a b$

Метод решения:

1. Выбираем удобное основание (чаще всего то, которое чаще встречается, или 10, или e).
2. Приводим все логарифмы к этому основанию.
3. Решаем полученное уравнение (часто после приведения получается уравнение с одинаковыми основаниями).
4. Проверяем корни по ОДЗ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Уравнение с двумя разными основаниями

Решим уравнение:

$$\log_2 x = \log_4 9$$

ОДЗ: $x > 0$.
Приведём правую часть к основанию 2: $\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2} = \frac{1}{2} \log_2 9 = \log_2 9^{1/2} = \log_2 3$.
Получаем: $\log_2 x = \log_2 3$, откуда $x = 3$.
Ответ: $x = 3$.

Пример 2

Уравнение с тремя разными основаниями

Решим уравнение:

$$\log_3 x + \log_9 x = 6$$

ОДЗ: $x > 0$.
Приведём $\log_9 x$ к основанию 3: $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2}$.
Тогда уравнение принимает вид:

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 6$$

$$\frac{3}{2} \log_3 x = 6$$

$$\log_3 x = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$x = 3^4 = 81$$

Ответ: $x = 81$.

Пример 3

Уравнение с произведением логарифмов разных оснований

Решим уравнение:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 x = \log_2 x$$

ОДЗ: $x > 0$.

Заметим, что $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 4 = 2$. Тогда $2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 x = \log_2 x$.

Далее $\log_4 5 \cdot \log_5 x = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 5} = \frac{\log_2 x}{2}$.

Получаем: $2 \cdot \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 x$, то есть $\log_2 x = \log_2 x$ — тождество, верное для всех $x > 0$.

Но нужно проверить, не теряем ли мы что-то? В процессе преобразований мы нигде не делили на нуль и не вводили ограничений. Значит, решением являются все $x > 0$.

Ответ: $x > 0$ (любое положительное число).

Пример 4

Уравнение с параметром в основании

Решим уравнение:

$$\log_x 2 + \log_2 x = 2$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Используем формулу $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$.

Пусть $t = \log_2 x$, тогда $\log_x 2 = \frac{1}{t}$.

Уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{t} + t = 2$$

Умножаем на t: $1 + t^2 = 2t$.

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t - 1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

Возвращаемся: $\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$.

Проверяем ОДЗ: $2 > 0, 2 \neq 1$ — подходит.

Ответ: $x = 2$.

Пример 5

Уравнение с корнем

Решим уравнение:

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 3$$

ОДЗ: $x > 0$.

Приведём первый логарифм к основанию 2: $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{1/2} = 2\log_2 x$.

Тогда уравнение: $2\log_2 x + \log_2 x = 3 \Rightarrow 3\log_2 x = 3 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 6

Уравнение с разными основаниями и суммой

Решим уравнение:

$$\log_2 x + \log_3 x = 1$$

ОДЗ: $x > 0$.

Это уравнение не решается приведением к одному основанию так просто, потому что после приведения мы получим сумму дробей с разными знаменателями. Здесь нужно использовать другой подход — например, перейти к натуральным логарифмам:

$$\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3} = 1$$
$$\ln x \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} \right) = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3}} = \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 2 + \ln 3} = \frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 6}$$

$$x = e^{\frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 6}}$$

Это можно упростить, заметив, что $\frac{\ln 2 \cdot \ln 3}{\ln 6} = \log_6 2 \cdot \log_6 3 \cdot \ln 6$? Не очень красиво. Оставим ответ в таком виде.

Пример 7

Уравнение с переменным основанием

Решим уравнение:

$$\log_x(x+2) = 2$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, и $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$, но с учётом $x > 0$ получаем $x > 0$, $x \neq 1$.

По определению логарифма: $x^2 = x + 2$.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Проверяем ОДЗ: $x = -1$ не подходит ($x > 0$), $x = 2$ подходит ($2 > 0$, $2 \neq 1$).

Ответ: $x = 2$.

Пример 8

Ещё одно уравнение с переменным основанием

Решим уравнение:

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = 1$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $2x > 0$, $2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Перейдём к основанию 2: $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, $\log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2(2x)} = \frac{1}{1+\log_2 x}$.

Пусть $t = \log_2 x$, тогда уравнение:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} = 1$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = 1$$

$$t(1+t) = 1$$

$$t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Возвращаемся: $x = 2^t$.

Оба значения положительны. Проверим ОДЗ: $x \neq 1$ и $x \neq \frac{1}{2}$. Ни одно из значений не равно этим числам (так как $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618$ — последнее не подходит, потому что x должно быть положительным). Значит, остаётся только $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x = 2^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Задачи

1. Решите уравнения, приведя к основанию 2:

1) $\log_2 x = \log_4 16$	**4)** $\log_4 x = \log_2 8$	**7)** $\log_2 x + \log_4 x = 3$
2) $\log_2 x = \log_8 64$	**5)** $\log_8 x = \log_2 4$	**8)** $\log_2 x + \log_8 x = 4$
3) $\log_2 x = \log_{16} 256$	**6)** $\log_{16} x = \log_2 32$	**9)** $\log_2 x + \log_{16} x = 5$

10) $\log_2 x - \log_4 x = 1$ **11)** $\log_2 x - \log_8 x = 2$ **12)** $\log_2 x - \log_{16} x = 3$

2. Решите уравнения, приведя к основанию 3:

1) $\log_3 x = \log_9 27$
2) $\log_3 x = \log_{27} 81$
3) $\log_3 x = \log_{81} 243$
4) $\log_9 x = \log_3 27$
5) $\log_{27} x = \log_3 9$
6) $\log_{81} x = \log_3 81$
7) $\log_3 x + \log_9 x = 2$
8) $\log_3 x + \log_{27} x = 2$
9) $\log_3 x + \log_{81} x = 2$
10) $\log_3 x - \log_9 x = 1$
11) $\log_3 x - \log_{27} x = 1$
12) $\log_3 x - \log_{81} x = 1$

3. Решите уравнения, приведя к основанию 5:

1) $\log_5 x = \log_{25} 125$
2) $\log_5 x = \log_{125} 625$
3) $\log_5 x = \log_{625} 3125$
4) $\log_{25} x = \log_5 125$
5) $\log_{125} x = \log_5 25$
6) $\log_{625} x = \log_5 625$
7) $\log_5 x + \log_{25} x = 2$
8) $\log_5 x + \log_{125} x = 2$
9) $\log_5 x + \log_{625} x = 2$
10) $\log_5 x - \log_{25} x = 1$
11) $\log_5 x - \log_{125} x = 1$
12) $\log_5 x - \log_{625} x = 1$

4. Решите уравнения с переменным основанием:

1) $\log_x 2 = 2$
2) $\log_x 3 = 2$
3) $\log_x 4 = 2$
4) $\log_x 8 = 3$
5) $\log_x 27 = 3$
6) $\log_x 64 = 3$
7) $\log_x (x+2) = 2$
8) $\log_x (x-1) = 2$
9) $\log_x (2x-1) = 2$
10) $\log_x (x^2 - 2x) = 2$
11) $\log_x (x^2 - 3x + 2) = 2$
12) $\log_x (x^2 - 5x + 6) = 2$

5. Решите уравнения с взаимно обратными логарифмами:

$\log_x 2 + \log_2 x = 2$
$\log_x 3 + \log_3 x = 2$
$\log_x 4 + \log_4 x = 2$
$\log_x 2 - \log_2 x = 0$
$\log_x 3 - \log_3 x = 0$
$\log_x 4 - \log_4 x = 0$
$\log_x 2 \cdot \log_2 x = 1$
$\log_x 3 \cdot \log_3 x = 1$
$\log_x 4 \cdot \log_4 x = 1$
$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$
$\log_x 3 + \log_3 x = \frac{10}{3}$
$\log_x 4 + \log_4 x = \frac{17}{4}$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 6$
2) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x = 6$
3) $\log_5 x \cdot \log_{25} x \cdot \log_{125} x = 6$
4) $\log_2 x \cdot \log_4 x = \log_8 x$
5) $\log_3 x \cdot \log_9 x = \log_{27} x$
6) $\log_5 x \cdot \log_{25} x = \log_{125} x$
7) $\log_x 2 \cdot \log_x 3 = \log_x 6$
8) $\log_x 2 \cdot \log_x 5 = \log_x 10$
9) $\log_x 3 \cdot \log_x 4 = \log_x 12$
10) $\log_2 x + \log_3 x = \log_4 x$
11) $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$
12) $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = h(x)$

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, где основание логарифма является выражением, зависящим от x. Такие уравнения требуют особого внимания к области допустимых значений.

Общий вид:

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — некоторые выражения.

ОДЗ:

- Основание $f(x)$ должно быть положительным и не равным единице:

$$f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1$$

- Аргумент $g(x)$ должен быть положительным:

$$g(x) > 0$$

Метод решения:

1. Записываем ОДЗ.
2. По определению логарифма:

$$f(x)^{h(x)} = g(x)$$

3. Решаем полученное уравнение.
4. Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни ОДЗ.
5. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Простое уравнение с линейными выражениями

Решим уравнение:

$$\log_x(x+2) = 2$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$. С учётом первых двух условий получаем $x > 0, x \neq 1$.

По определению: $x^2 = x + 2$.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Проверяем ОДЗ: $x = -1$ не подходит $(x > 0)$. $x = 2$ подходит $(2 > 0, 2 \neq 1)$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2

Уравнение с квадратными выражениями

Решим уравнение:

$$\log_{x-1}(x^2 - 3x + 3) = 2$$

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$, $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$, $x^2 - 3x + 3 > 0$. Дискриминант $D = 9 - 12 = -3 < 0$, ветви параболы вверх, значит неравенство выполняется при всех x. Итого ОДЗ: $x > 1$, $x \neq 2$.

По определению: $(x-1)^2 = x^2 - 3x + 3$.

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 3x + 3$$

$$-2x + 1 = -3x + 3$$

$$-2x + 3x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Проверяем ОДЗ: $x = 2$ не подходит, так как $x \neq 2$. Значит, решений нет.
Ответ: решений нет.

Пример 3

Уравнение с корнем в показателе

Решим уравнение:

$$\log_x(x+3) = \frac{1}{2}$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Итого $x > 0, x \neq 1$.
По определению: $x^{1/2} = \sqrt{x} = x + 3$. Возводим в квадрат: $x = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$.

$$0 = x^2 + 5x + 9$$

$$D = 25 - 36 = -11 < 0$$

Корней нет.
Ответ: решений нет.

Пример 4

Уравнение с отрицательным показателем

Решим уравнение:

$$\log_{x+1}(2x+1) = -1$$

ОДЗ: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$, $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$. Объединяя, получаем $x > -\frac{1}{2}, x \neq 0$.
По определению: $(x+1)^{-1} = \frac{1}{x+1} = 2x + 1$.

$$1 = (2x+1)(x+1)$$

$$1 = 2x^2 + 2x + x + 1$$

$$1 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$0 = 2x^2 + 3x$$

$$x(2x+3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{3}{2}$$

Проверяем ОДЗ: $x = 0$ не подходит ($x \neq 0$). $x = -\frac{3}{2} = -1.5$ не подходит ($x > -\frac{1}{2}$). Значит, решений нет.

Пример 5

Уравнение с корнем в основании

Решим уравнение:

$$\log_{\sqrt{x}} 4 = 2$$

ОДЗ: $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$, $\sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$, $4 > 0$ автоматически.
По определению: $(\sqrt{x})^2 = x = 4$.

$$x = 4$$

Проверяем ОДЗ: $4 > 0, 4 \neq 1$ — подходит.
Ответ: $x = 4$.

Пример 6

Уравнение с дробным основанием

Решим уравнение:

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 = 3$$

ОДЗ: $\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow x > 0$, $\frac{x}{2} \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$, $8 > 0$ автоматически.

По определению: $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = 8$.

$$\frac{x^3}{8} = 8$$
$$x^3 = 64$$
$$x = 4$$

Проверяем ОДЗ: $4 > 0$, $4 \neq 2$ — подходит.
Ответ: $x = 4$.

Пример 7

Уравнение с параметром в показателе

Решим уравнение:

$$\log_x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 1$ (уже учтено).
По определению: $x^0 = 1 = x^2 - 2x + 1$.

$$x^2 - 2x + 1 = 1$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 2$$

Проверяем ОДЗ: $x = 0$ не подходит ($x > 0$). $x = 2$ подходит ($2 > 0$, $2 \neq 1$).
Ответ: $x = 2$.

Пример 8

Уравнение, сводящееся к квадратному

Решим уравнение:

$$\log_x(x^2 - 3x + 5) = 2$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x^2 - 3x + 5 > 0$ (дискриминант $9 - 20 = -11 < 0$, значит всегда положительно).
По определению: $x^2 = x^2 - 3x + 5$.

$$0 = -3x + 5$$
$$3x = 5$$
$$x = \frac{5}{3}$$

Проверяем ОДЗ: $\frac{5}{3} > 0$, $\frac{5}{3} \neq 1$ — подходит.
Ответ: $x = \frac{5}{3}$.

Задачи

1. Решите уравнения:

1) $\log_x 4 = 2$

2) $\log_x 9 = 2$

3) $\log_x 16 = 2$

4) $\log_x 8 = 3$

5) $\log_x 27 = 3$

6) $\log_x 64 = 3$

7) $\log_x(x+2) = 2$

8) $\log_x(x-1) = 2$

9) $\log_x(2x-1) = 2$

10) $\log_x(x^2 - 2x) = 2$

11) $\log_x(x^2 - 3x + 2) = 2$

12) $\log_x(x^2 - 5x + 6) = 2$

2. Найдите ОДЗ и решите уравнения:

1) $\log_{x-1} 4 = 2$

2) $\log_{x+1} 9 = 2$

3) $\log_{2x-1} 16 = 2$

4) $\log_{x-2} 8 = 3$

5) $\log_{x+3} 27 = 3$

6) $\log_{3x-2} 64 = 3$

7) $\log_{x+1}(x^2+x)=2$

8) $\log_{x-2}(x^2-3x+2)=2$

9) $\log_{2x-1}(x^2+x-1)=2$

10) $\log_x(x^2-3x+3)=1$

11) $\log_x(x^2-4x+5)=1$

12) $\log_x(x^2-5x+7)=1$

3. Решите уравнения с дробными и отрицательными показателями:

1) $\log_x 4=\frac{1}{2}$

2) $\log_x 9=\frac{1}{2}$

3) $\log_x 16=\frac{1}{2}$

4) $\log_x 8=\frac{1}{3}$

5) $\log_x 27=\frac{1}{3}$

6) $\log_x 64=\frac{1}{3}$

7) $\log_x 4=-2$

8) $\log_x 9=-2$

9) $\log_x 16=-2$

10) $\log_x 8=-3$

11) $\log_x 27=-3$

12) $\log_x 64=-3$

4. Решите уравнения с корнями в основании или аргументе:

1) $\log_{\sqrt{x}} 4=2$

2) $\log_{\sqrt{x}} 9=2$

3) $\log_{\sqrt{x}} 16=2$

4) $\log_{\sqrt[3]{x}} 8=3$

5) $\log_{\sqrt[3]{x}} 27=3$

6) $\log_{\sqrt[3]{x}} 64=3$

7) $\log_x \sqrt{x}=\frac{1}{2}$

8) $\log_x \sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}$

9) $\log_x \sqrt[4]{x}=\frac{1}{4}$

10) $\log_x \sqrt{x^3}=\frac{3}{2}$

11) $\log_x \sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3}$

12) $\log_x \sqrt[4]{x^5}=\frac{5}{4}$

5. Решите уравнения, сводящиеся к квадратным:

1) $\log_x 2+\log_2 x=2$

2) $\log_x 3+\log_3 x=2$

3) $\log_x 4+\log_4 x=2$

4) $\log_x 2+\log_2 x=\frac{5}{2}$

5) $\log_x 3+\log_3 x=\frac{10}{3}$

6) $\log_x 4+\log_4 x=\frac{17}{4}$

7) $\log_x 2\cdot\log_2 x=1$

8) $\log_x 3\cdot\log_3 x=1$

9) $\log_x 4\cdot\log_4 x=1$

10) $\log_x 2\cdot\log_2 x=4$

11) $\log_x 3\cdot\log_3 x=9$

12) $\log_x 4\cdot\log_4 x=16$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_x(x+3)=\log_{x+3}x$

2) $\log_x(x+4)=\log_{x+4}x$

3) $\log_x(2x+1)=\log_{2x+1}x$

4) $\log_x(x^2-1)=\log_{x^2-1}x$

5) $\log_x(x^2-4)=\log_{x^2-4}x$

6) $\log_x(x^2-9)=\log_{x^2-9}x$

7) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=1$

8) $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3=1$

9) $\log_x 4\cdot\log_{4x} 4=1$

10) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\frac{1}{2}$

11) $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3=\frac{1}{3}$

12) $\log_x 4\cdot\log_{4x} 4=\frac{1}{4}$

Уравнения с переменным основанием и аргументом

Теория

В этой главе мы рассмотрим более сложные уравнения, где переменная встречается и в основании, и в аргументе логарифма, а также уравнения, содержащие несколько логарифмов с переменными основаниями.

Основные типы:

- Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$
- Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x)$
- Уравнения, содержащие сумму или разность логарифмов с переменными основаниями

Методы решения:

1. Для уравнений вида $\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ — потенцирование с учётом ОДЗ: $g(x) = h(x)$, при условии $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$.
2. Для уравнений вида $\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x)$ — можно привести к общему основанию или использовать свойство равенства логарифмов при одинаковых аргументах.
3. Часто помогает переход к натуральным логарифмам или использование формулы перехода к новому основанию.

Важное замечание: Во всех таких уравнениях необходимо тщательно выписывать ОДЗ, так как основание логарифма должно быть положительным и не равным 1, а аргумент — положительным.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Одинаковые основания, разные аргументы

Решим уравнение:

$$\log_x(x+2) = \log_x(2x-1)$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, x+2 > 0 \Rightarrow x > -2, 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Объединяя, получаем $x > \frac{1}{2}, x \neq 1$.
Потенцируем: $x+2 = 2x-1$.

$$2+1 = 2x - x$$

$$3 = x$$

$$x = 3$$

Проверяем ОДЗ: $3 > \frac{1}{2}, 3 \neq 1$ — подходит.
Ответ: $x = 3$.

Пример 2

Одинаковые аргументы, разные основания

Решим уравнение:

$$\log_x 2 = \log_{2x} 2$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, 2x > 0 \Rightarrow x > 0, 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Итого $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$.
Перейдём к натуральным логарифмам:

$$\frac{\ln 2}{\ln x} = \frac{\ln 2}{\ln(2x)}$$

Так как $\ln 2 \neq 0$, можно сократить:

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln(2x)}$$

$$\ln x = \ln(2x)$$
$$x = 2x$$
$$x - 2x = 0$$
$$-x = 0$$
$$x = 0$$

Проверяем ОДЗ: $x = 0$ не подходит ($x > 0$).
Ответ: решений нет.

Пример 3

Уравнение с суммой логарифмов

Решим уравнение:

$$\log_x(x+1) + \log_{x+1} x = 2$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$. С учётом $x > 0$ получаем $x > 0$, $x \neq 1$.
Пусть $t = \log_x(x+1)$. Тогда $\log_{x+1} x = \frac{1}{t}$.
Уравнение принимает вид:

$$t + \frac{1}{t} = 2$$
$$t^2 + 1 = 2t$$
$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 = 0$$
$$t = 1$$

Возвращаемся: $\log_x(x+1) = 1 \Rightarrow x^1 = x + 1 \Rightarrow x = x + 1 \Rightarrow 0 = 1$ — противоречие.
Решений нет.

Пример 4

Уравнение с разными основаниями и аргументами

Решим уравнение:

$$\log_2 x = \log_4(x+2)$$

ОДЗ: $x > 0$, $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Итого $x > 0$.
Приведём правую часть к основанию 2: $\log_4(x+2) = \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+2)}{2}$.
Получаем: $\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2(x+2)$. Умножаем на 2: $2\log_2 x = \log_2(x+2)$.

$$\log_2 x^2 = \log_2(x+2)$$
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$D = 1 + 8 = 9$$
$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Проверяем ОДЗ: $x = -1$ не подходит ($x > 0$). $x = 2$ подходит.
Ответ: $x = 2$.

Пример 5

Уравнение с произведением логарифмов разных оснований

Решим уравнение:

$$\log_2 x \cdot \log_x 2 = 1$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.
По свойству $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, произведение всегда равно 1 при всех допустимых x.
Ответ: $x > 0$, $x \neq 1$ (любое допустимое значение).

Пример 6

Уравнение, сводящееся к квадратному

Решим уравнение:

$$\log_x 2 + \log_{\sqrt{x}} 2 = 3$$

ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, \sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0, \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$. Итого $x > 0, x \neq 1$.

Приведём второй логарифм к основанию x: $\log_{\sqrt{x}} 2 = \frac{\log_x 2}{\log_x \sqrt{x}} = \frac{\log_x 2}{\frac{1}{2}} = 2\log_x 2$.

Пусть $t = \log_x 2$, тогда уравнение:

$$t + 2t = 3 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$$

Возвращаемся: $\log_x 2 = 1 \Rightarrow x^1 = 2 \Rightarrow x = 2$.

Проверяем ОДЗ: $2 > 0, 2 \neq 1$ — подходит.

Ответ: $x = 2$.

Пример 7

Уравнение с тремя разными основаниями

Решим уравнение:

$$\log_2 x + \log_3 x = \log_4 x$$

ОДЗ: $x > 0$.

Перейдём к натуральным логарифмам:

$$\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 3} = \frac{\ln x}{\ln 4}$$

Если $\ln x = 0$, то $x = 1$. Проверим: $\log_2 1 + \log_3 1 = 0 + 0 = 0$, $\log_4 1 = 0$ — подходит.

Если $\ln x \neq 0$, разделим обе части на $\ln x$:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 4}$$

$$\frac{\ln 3 + \ln 2}{\ln 2 \cdot \ln 3} = \frac{1}{2\ln 2}$$

$$\frac{\ln 6}{\ln 2 \cdot \ln 3} = \frac{1}{2\ln 2}$$

Умножаем на $\ln 2 \cdot \ln 3$:

$$\ln 6 = \frac{\ln 3}{2}$$

$$2\ln 6 = \ln 3$$

$$\ln 36 = \ln 3$$

$$36 = 3$$

— противоречие.

Таким образом, единственное решение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Задачи

1. Решите уравнения с одинаковыми основаниями:

1) $\log_x(x+1) = \log_x(2x-3)$

2) $\log_x(x-1) = \log_x(3-2x)$

3) $\log_x(2x+1) = \log_x(x+4)$

4) $\log_{x-1}(x+2) = \log_{x-1}(3x-4)$

5) $\log_{x+2}(x-1) = \log_{x+2}(2x-5)$

6) $\log_{2x-1}(x+3) = \log_{2x-1}(4x-7)$

2. Решите уравнения с одинаковыми аргументами:

1) $\log_x 2 = \log_{2x} 2$

2) $\log_x 3 = \log_{3x} 3$

3) $\log_x 4 = \log_{4x} 4$

4) $\log_x 5 = \log_{5x} 5$

5) $\log_{x+1} 2 = \log_{2x+2} 2$

6) $\log_{x-1} 3 = \log_{3x-3} 3$

3. Решите уравнения с суммой взаимно обратных логарифмов:

1) $\log_x(x+1)+\log_{x+1}x=2$

2) $\log_x(x+2)+\log_{x+2}x=2$

3) $\log_x(2x-1)+\log_{2x-1}x=2$

4) $\log_x(x+1)+\log_{x+1}x=\frac{5}{2}$

5) $\log_x(x+2)+\log_{x+2}x=\frac{5}{2}$

6) $\log_x(2x-1)+\log_{2x-1}x=\frac{5}{2}$

4. Решите уравнения, приводя к одному основанию:

1) $\log_2 x=\log_4(x+2)$

2) $\log_2 x=\log_8(x+6)$

3) $\log_3 x=\log_9(x+2)$

4) $\log_3 x=\log_{27}(x+6)$

5) $\log_5 x=\log_{25}(x+4)$

6) $\log_5 x=\log_{125}(x+10)$

5. Решите уравнения с произведением логарифмов:

1) $\log_2 x\cdot\log_x 2=1$

2) $\log_3 x\cdot\log_x 3=1$

3) $\log_5 x\cdot\log_x 5=1$

4) $\log_2 x\cdot\log_{2x} 2=1$

5) $\log_3 x\cdot\log_{3x} 3=1$

6) $\log_5 x\cdot\log_{5x} 5=1$

7) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\frac{1}{2}$

8) $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3=\frac{1}{3}$

9) $\log_x 4\cdot\log_{4x} 4=\frac{1}{4}$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x+\log_3 x=\log_4 x$

2) $\log_2 x+\log_3 x=\log_5 x$

3) $\log_2 x+\log_4 x=\log_8 x$

4) $\log_3 x+\log_9 x=\log_{27} x$

5) $\log_5 x+\log_{25} x=\log_{125} x$

6) $\log_2 x\cdot\log_3 x=\log_4 x$

7) $\log_2 x\cdot\log_4 x=\log_8 x$

8) $\log_3 x\cdot\log_9 x=\log_{27} x$

9) $\log_5 x\cdot\log_{25} x=\log_{125} x$

10) $\log_x 2\cdot\log_x 3=\log_x 6$

11) $\log_x 2\cdot\log_x 5=\log_x 10$

12) $\log_x 3\cdot\log_x 4=\log_x 12$

Практика по блоку 2

Теория

В этом блоке мы изучили уравнения с разными основаниями:

- Приведение к одному основанию (глава 6)
- Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = h(x)$ (глава 7)
- Уравнения с переменным основанием и аргументом (глава 8)

Во всех этих уравнениях особенно важно помнить про ОДЗ: основание логарифма должно быть положительным и не равным единице, аргумент — положительным.

В этой главе собраны задачи на все эти типы уравнений вперемешку. Ваша задача — определить, к какому типу относится уравнение, и применить нужный метод.

Задачи

1. Решите уравнения, приведя к одному основанию:

1) $\log_2 x = \log_4 16$

2) $\log_3 x = \log_9 27$

3) $\log_5 x = \log_{25} 125$

4) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

5) $\log_3 x + \log_9 x = 2$

6) $\log_5 x + \log_{25} x = 2$

7) $\log_2 x + \log_8 x = 4$

8) $\log_3 x + \log_{27} x = 4$

9) $\log_5 x + \log_{125} x = 4$

10) $\log_2 x - \log_4 x = 1$

11) $\log_3 x - \log_9 x = 1$

12) $\log_5 x - \log_{25} x = 1$

2. Решите уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = h(x)$:

1) $\log_x 4 = 2$

2) $\log_x 9 = 2$

3) $\log_x 16 = 2$

4) $\log_x(x + 2) = 2$

5) $\log_x(x - 1) = 2$

6) $\log_x(2x - 1) = 2$

7) $\log_{x-1} 4 = 2$

8) $\log_{x+1} 9 = 2$

9) $\log_{2x-1} 16 = 2$

10) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$

11) $\log_x 9 = \frac{1}{2}$

12) $\log_x 16 = \frac{1}{2}$

3. Решите уравнения с переменным основанием и аргументом:

1) $\log_x(x + 1) = \log_x(2x - 3)$

2) $\log_x(x - 1) = \log_x(3 - 2x)$

3) $\log_x(2x + 1) = \log_x(x + 4)$

4) $\log_x 2 = \log_{2x} 2$

5) $\log_x 3 = \log_{3x} 3$

6) $\log_x 4 = \log_{4x} 4$

7) $\log_2 x = \log_4(x + 2)$

8) $\log_3 x = \log_9(x + 2)$

9) $\log_5 x = \log_{25}(x + 4)$

10) $\log_x(x + 1) + \log_{x+1} x = 2$

11) $\log_x(x + 2) + \log_{x+2} x = 2$

12) $\log_x(2x - 1) + \log_{2x-1} x = 2$

4. Найдите ОДЗ и решите уравнения:

1) $\log_{x-2} 8 = 3$

2) $\log_{x+3} 27 = 3$

3) $\log_{2x-1} 64 = 3$

4) $\log_{x+1}(x^2 + x) = 2$

5) $\log_{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 2$

6) $\log_{2x-1}(x^2 + x - 1) = 2$

7) $\log_x(x^2 - 3x + 3) = 1$

8) $\log_x(x^2 - 4x + 5) = 1$

9) $\log_x(x^2 - 5x + 7) = 1$

10) $\log_x 4 = -2$

11) $\log_x 9 = -2$

12) $\log_x 16 = -2$

5. Решите уравнения с произведением логарифмов:

1) $\log_2 x \cdot \log_x 2 = 1$

2) $\log_3 x \cdot \log_x 3 = 1$

3) $\log_5 x \cdot \log_x 5 = 1$

4) $\log_2 x \cdot \log_{2x} 2 = 1$

5) $\log_3 x \cdot \log_{3x} 3 = 1$

6) $\log_5 x \cdot \log_{5x} 5 = 1$

7) $\log_2 x \cdot \log_4 x = 2$

8) $\log_3 x \cdot \log_9 x = 2$

9) $\log_5 x \cdot \log_{25} x = 2$

10) $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 6$

11) $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x = 6$

12) $\log_5 x \cdot \log_{25} x \cdot \log_{125} x = 6$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x + \log_3 x = \log_4 x$

2) $\log_2 x + \log_4 x = \log_8 x$

3) $\log_3 x + \log_9 x = \log_{27} x$

4) $\log_x 2 \cdot \log_x 3 = \log_x 6$

5) $\log_x 2 \cdot \log_x 5 = \log_x 10$

6) $\log_x 3 \cdot \log_x 4 = \log_x 12$

7) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_4 x$

8) $\log_2 x \cdot \log_4 x = \log_8 x$

9) $\log_3 x \cdot \log_9 x = \log_{27} x$

10) $\log_x (x+1) \cdot \log_{x+1} x = 1$

11) $\log_x (x+2) \cdot \log_{x+2} x = 1$

12) $\log_x (2x-1) \cdot \log_{2x-1} x = 1$

Системы, сводящиеся к простейшим

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы логарифмических уравнений, которые сводятся к простейшим с помощью выражений одной переменной через другую или непосредственного применения свойств логарифмов.

Основные типы:

- Системы, где можно выразить одну переменную через другую из одного уравнения и подставить во второе.
- Системы, где после потенцирования получаются линейные или квадратные уравнения.
- Системы, где можно сделать замену переменной.

Общий подход:

1. Находим ОДЗ для всех переменных.
2. Преобразуем уравнения, используя свойства логарифмов.
3. Решаем полученную систему (обычно методом подстановки или сложения).
4. Проверяем, удовлетворяют ли найденные решения ОДЗ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Система с выражением одной переменной

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Преобразуем первое уравнение:

$$\log_2(xy) = 5 \Rightarrow xy = 2^5 = 32$$

Получили систему:

$$\begin{cases} xy = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Выразим x из второго уравнения: $x = y + 4$. Подставляем в первое: $(y + 4)y = 32$.

$$y^2 + 4y - 32 = 0$$

$$D = 16 + 128 = 144$$

$$y_1 = \frac{-4 - 12}{2} = -8, \quad y_2 = \frac{-4 + 12}{2} = 4$$

Проверяем ОДЗ: $y = -8$ не подходит ($y > 0$). $y = 4$ подходит. Тогда $x = 4 + 4 = 8$.

Ответ: $(x, y) = (8, 4)$.

Пример 2

Система с разностью логарифмов

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Преобразуем первое уравнение:

$$\log_2 \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$$

Подставляем во второе: $2y + y = 6 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$. Тогда $x = 2 \cdot 2 = 4$.
Проверяем ОДЗ: $4 > 0$, $2 > 0$ — подходит.
Ответ: $(x, y) = (4, 2)$.

Пример 3

Система с суммой логарифмов

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
Первое уравнение: $\log_3(xy) = 2 \Rightarrow xy = 3^2 = 9$.
Получили систему:

$$\begin{cases} xy = 9 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Используем формулу $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$(x + y)^2 = 20 + 2 \cdot 9 = 20 + 18 = 38$$

$$x + y = \sqrt{38} \quad (\text{так как } x > 0, y > 0)$$

Теперь имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{38} \\ xy = 9 \end{cases}$$

По теореме Виета, x и y — корни уравнения $t^2 - \sqrt{38}t + 9 = 0$.

$$D = 38 - 36 = 2$$

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{38} \pm \sqrt{2}}{2}$$

Таким образом, решения:

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{38} + \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{38} - \sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{\sqrt{38} - \sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{38} + \sqrt{2}}{2}\right)$$

Пример 4

Система с разными основаниями

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
Приведём все логарифмы к основанию 2: $\log_4 y = \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = \frac{\log_2 y}{2}$ $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{2}$
Пусть $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} u + \frac{v}{2} = 3 \\ \frac{u}{2} + v = 3 \end{cases}$$

Умножим оба уравнения на 2:

$$\begin{cases} 2u + v = 6 \\ u + 2v = 6 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $(2u + v) - (u + 2v) = 6 - 6 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$.
Подставим в первое: $2u + u = 6 \Rightarrow 3u = 6 \Rightarrow u = 2$, значит $v = 2$.
Возвращаемся: $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$, $\log_2 y = 2 \Rightarrow y = 4$.
Ответ: $(x, y) = (4, 4)$.

Пример 5

Система с тремя переменными

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 y + \log_2 z = 4 \\ \log_2 z + \log_2 x = 5 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Пусть $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$, $c = \log_2 z$. Тогда система:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 4 \\ c + a = 5 \end{cases}$$

Сложим все три уравнения: $2(a + b + c) = 3 + 4 + 5 = 12 \Rightarrow a + b + c = 6$.

Теперь находим каждую переменную:

$$a = (a + b + c) - (b + c) = 6 - 4 = 2$$

$$b = (a + b + c) - (a + c) = 6 - 5 = 1$$

$$c = (a + b + c) - (a + b) = 6 - 3 = 3$$

Возвращаемся:

$$x = 2^a = 2^2 = 4$$
$$y = 2^b = 2^1 = 2$$
$$z = 2^c = 2^3 = 8$$

Ответ: $(x, y, z) = (4, 2, 8)$.

Пример 6

Система с произведением и суммой

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Пусть $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$$

По теореме Виета, u и v — корни уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$.

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3$$

Значит, $(u, v) = (1, 3)$ или $(3, 1)$.

Возвращаемся:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2, \quad \log_2 y = 3 \Rightarrow y = 8$$

или

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8, \quad \log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2$$

Ответ: $(x, y) = (2, 8)$ или $(8, 2)$.

Задачи

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 3\\ x + y = 6\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_2 x - \log_2 y = 1\\ x + y = 6\end{cases}$

7) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 4\\ x^2 + y^2 = 20\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 2\\ x - y = 2\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_3 x - \log_3 y = 2\\ x - y = 8\end{cases}$

8) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 3\\ x^2 + y^2 = 30\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 2\\ xy = 20\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_5 x - \log_5 y = 1\\ xy = 20\end{cases}$

9) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 2\\ x^2 + y^2 = 26\end{cases}$

2. Решите системы с разными основаниями:

1) $\begin{cases}\log_2 x + \log_4 y = 2\\ x + y = 5\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_5 x + \log_{25} y = 2\\ xy = 20\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_3 x + \log_9 y = 2\\ \log_9 x + \log_3 y = 2\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_3 x + \log_9 y = 2\\ x - y = 2\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_2 x + \log_4 y = 3\\ \log_4 x + \log_2 y = 3\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_5 x + \log_{25} y = 2\\ \log_{25} x + \log_5 y = 2\end{cases}$

3. Решите системы с тремя переменными:

1) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 3\\ \log_2 y + \log_2 z = 4\\ \log_2 z + \log_2 x = 5\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 2\\ \log_5 y + \log_5 z = 3\\ \log_5 z + \log_5 x = 4\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 3\\ \log_3 y + \log_3 z = 4\\ \log_3 z + \log_3 x = 5\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 2\\ \log_3 y + \log_3 z = 3\\ \log_3 z + \log_3 x = 4\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 4\\ \log_2 y + \log_2 z = 5\\ \log_2 z + \log_2 x = 6\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 3\\ \log_5 y + \log_5 z = 4\\ \log_5 z + \log_5 x = 5\end{cases}$

4. Решите системы с произведением логарифмов:

1) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 4\\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 4\\ \log_5 x \cdot \log_5 y = 3\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 5\\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 4\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 3\\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 2\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 4\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 5\\ \log_5 x \cdot \log_5 y = 4\end{cases}$

5. Решите системы повышенной сложности:

1) $\begin{cases}\log_2(x-y) + \log_2(x+y) = 3\\ x^2 - y^2 = 8\end{cases}$

2) $\begin{cases}\log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 2\\ x^2 - y^2 = 9\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_5(x-y) + \log_5(x+y) = 2\\ x^2 - y^2 = 20\end{cases}$

4) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 3\\ \log_2 x - \log_2 y = 1\end{cases}$

5) $\begin{cases}\log_3 x + \log_3 y = 4\\ \log_3 x - \log_3 y = 2\end{cases}$

6) $\begin{cases}\log_5 x + \log_5 y = 3\\ \log_5 x - \log_5 y = 1\end{cases}$

7) $\begin{cases}\log_2 x + \log_4 y = 3\\ \log_4 x + \log_2 y = 3\\ x + y = 6\end{cases}$

8) $\begin{cases}\log_3 x + \log_9 y = 2\\ \log_9 x + \log_3 y = 2\\ xy = 9\end{cases}$

9) $\begin{cases}\log_5 x + \log_{25} y = 2\\ \log_{25} x + \log_5 y = 2\\ x + y = 10\end{cases}$

Системы с использованием замены переменной

Теория

В этой главе мы рассмотрим системы логарифмических уравнений, которые эффективно решаются с помощью замены переменной. Чаще всего в таких системах логарифмы образуют симметричные комбинации, позволяющие ввести новые переменные.

Основные идеи:

- Замена $u = \log_a x$, $v = \log_a y$ сводит систему к линейной или квадратной относительно u и v.
- Иногда удобно ввести $u = x + y$, $v = xy$ и использовать связь с логарифмами.
- В системах с разными основаниями помогает переход к одному основанию и замена.

Общий подход:

1. Находим ОДЗ для всех переменных.
2. Выбираем подходящую замену, чтобы упростить уравнения.
3. Решаем полученную систему относительно новых переменных.
4. Возвращаемся к исходным переменным.
5. Проверяем, удовлетворяют ли найденные решения ОДЗ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Замена $u = \log_a x$, $v = \log_a y$

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
Пусть $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \end{cases}$$

Складываем уравнения: $2u = 6 \Rightarrow u = 3$. Вычитаем: $2v = 4 \Rightarrow v = 2$.
Возвращаемся:

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$$
$$\log_2 y = 2 \Rightarrow y = 2^2 = 4$$

Проверяем ОДЗ: $8 > 0$, $4 > 0$ — подходит.
Ответ: $(x, y) = (8, 4)$.

Пример 2

Симметричная система

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
Пусть $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда:

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$$

По теореме Виета, u и v — корни уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$.

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 3$$

Значит, $(u, v) = (1, 3)$ или $(3, 1)$.

Возвращаемся:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2, \quad \log_2 y = 3 \Rightarrow y = 8$$

или

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8, \quad \log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2$$

Ответ: $(x, y) = (2, 8)$ или $(8, 2)$.

Пример 3

Система с разными основаниями

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.

Приведём все логарифмы к основанию 2: $\log_4 y = \frac{\log_2 y}{2}$, $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{2}$.

Пусть $u = \log_2 x$, $v = \log_2 y$. Тогда:

$$\begin{cases} u + \frac{v}{2} = 3 \\ \frac{u}{2} + v = 3 \end{cases}$$

Умножим оба уравнения на 2:

$$\begin{cases} 2u + v = 6 \\ u + 2v = 6 \end{cases}$$

Вычтем из первого второе: $(2u + v) - (u + 2v) = 6 - 6 \Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$.

Подставим в первое: $2u + u = 6 \Rightarrow 3u = 6 \Rightarrow u = 2$, значит $v = 2$.

Возвращаемся: $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$, $\log_2 y = 2 \Rightarrow y = 4$.

Ответ: $(x, y) = (4, 4)$.

Пример 4

Система с произведением и суммой переменных

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2(x + y) + \log_2(x - y) = 3 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

ОДЗ: $x + y > 0$, $x - y > 0$.

Преобразуем первое уравнение:

$$\log_2((x + y)(x - y)) = 3 \Rightarrow \log_2(x^2 - y^2) = 3$$

Но $x^2 - y^2 = 8$ из второго уравнения. Подставляем:

$$\log_2 8 = 3$$

Это верно, значит первое уравнение не даёт новой информации. Оно выполняется автоматически при выполнении второго.

Таким образом, система сводится к одному уравнению $x^2 - y^2 = 8$ и условиям $x + y > 0$, $x - y > 0$.

Решений бесконечно много. Например, $x = 3$, $y = 1$: $9 - 1 = 8$, $x + y = 4 > 0$, $x - y = 2 > 0$.

Ответ: все пары (x, y), удовлетворяющие $x^2 - y^2 = 8$ и $x > y > 0$.

Пример 5

Система с тремя переменными

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 y + \log_2 z = 4 \\ \log_2 z + \log_2 x = 5 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
Пусть $a = \log_2 x$, $b = \log_2 y$, $c = \log_2 z$. Тогда:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ b + c = 4 \\ c + a = 5 \end{cases}$$

Сложим все три уравнения: $2(a+b+c) = 3+4+5 = 12 \Rightarrow a+b+c = 6$.
Теперь находим каждую переменную:

$$a = (a+b+c) - (b+c) = 6 - 4 = 2$$

$$b = (a+b+c) - (a+c) = 6 - 5 = 1$$

$$c = (a+b+c) - (a+b) = 6 - 3 = 3$$

Возвращаемся:

$$x = 2^a = 2^2 = 4$$
$$y = 2^b = 2^1 = 2$$
$$z = 2^c = 2^3 = 8$$

Ответ: $(x, y, z) = (4, 2, 8)$.

Пример 6

Система с заменой $u = x + y$, $v = xy$

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.
Первое уравнение: $\log_2(xy) = 4 \Rightarrow xy = 2^4 = 16$.
Пусть $u = x + y$, $v = xy = 16$. Тогда $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 32 = 20$.

$$u^2 = 52 \Rightarrow u = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \quad (\text{так как } x > 0, y > 0)$$

Теперь x и y — корни уравнения $t^2 - 2\sqrt{13}t + 16 = 0$.

$$D = 52 - 64 = -12 < 0$$

Решений нет.

Пример 7

Система с логарифмами от выражений

Решим систему:

$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 1 \\ \log_2(x + y) = 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $x - y > 0$, $x + y > 0$.
По определению логарифма:

$$x - y = 2^1 = 2$$
$$x + y = 2^3 = 8$$

Складываем уравнения: $2x = 10 \Rightarrow x = 5$. Вычитаем: $2y = 6 \Rightarrow y = 3$.
Проверяем ОДЗ: $5 - 3 = 2 > 0$, $5 + 3 = 8 > 0$ — подходит.
Ответ: $(x, y) = (5, 3)$.

Задачи

1. Решите системы с заменой $u = \log_a x$, $v = \log_a y$:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 4 \\ \log_3 x - \log_3 y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 3 \\ \log_5 x - \log_5 y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 4 \\ \log_5 x \cdot \log_5 y = 3 \end{cases}$

2. Решите системы с разными основаниями:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ \log_9 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{25} y = 2 \\ \log_{25} x + \log_5 y = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_8 y = 2 \\ \log_8 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_{27} y = 2 \\ \log_{27} x + \log_3 y = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{125} y = 2 \\ \log_{125} x + \log_5 y = 2 \end{cases}$

3. Решите системы с тремя переменными:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 y + \log_2 z = 4 \\ \log_2 z + \log_2 x = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ \log_3 y + \log_3 z = 3 \\ \log_3 z + \log_3 x = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ \log_5 y + \log_5 z = 3 \\ \log_5 z + \log_5 x = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 y + \log_2 z = 5 \\ \log_2 z + \log_2 x = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 y + \log_3 z = 4 \\ \log_3 z + \log_3 x = 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 3 \\ \log_5 y + \log_5 z = 4 \\ \log_5 z + \log_5 x = 5 \end{cases}$

4. Решите системы с логарифмами от выражений:

1) $\begin{cases} \log_2(x - y) = 1 \\ \log_2(x + y) = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3(x - y) = 2 \\ \log_3(x + y) = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5(x - y) = 1 \\ \log_5(x + y) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(x - y) = 2 \\ \log_2(x + y) = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3(x - y) = 1 \\ \log_3(x + y) = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5(x - y) = 2 \\ \log_5(x + y) = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2(x - y) + \log_2(x + y) = 3 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 2 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5(x - y) + \log_5(x + y) = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$

5. Решите системы повышенной сложности:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ \log_9 x + \log_3 y = 2 \\ xy = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{25} y = 2 \\ \log_{25} x + \log_5 y = 2 \\ x + y = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 2 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x \cdot \log_3 y = 3 \\ \log_3 x + \log_3 y = 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_5 y = 4 \\ \log_5 x + \log_5 y = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x^2 + \log_2 y^2 = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x^2 + \log_3 y^2 = 6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ \log_5 x^2 + \log_5 y^2 = 4 \end{cases}$

Практика по блоку 3

Теория

В этом блоке мы изучили системы логарифмических уравнений:

- Системы, сводящиеся к простейшим (глава 10)
- Системы с использованием замены переменной (глава 11)

Основные методы решения систем:

- Выражение одной переменной через другую и подстановка
- Замена $u = \log_a x$, $v = \log_a y$
- Использование свойств логарифмов для упрощения уравнений
- Переход к новому основанию

В этой главе собраны задачи на все эти типы систем вперемешку. Ваша задача — определить, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите системы, сводящиеся к простейшим:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ x^2 + y^2 = 30 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ xy = 20 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = 1 \\ xy = 20 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}$

2. Решите системы с разными основаниями:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_8 y = 2 \\ \log_8 x + \log_2 y = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ \log_9 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_{27} y = 2 \\ \log_{27} x + \log_3 y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{25} y = 2 \\ xy = 20 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{25} y = 2 \\ \log_{25} x + \log_5 y = 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{125} y = 2 \\ \log_{125} x + \log_5 y = 2 \end{cases}$

3. Решите системы с заменой $u = \log_a x$, $v = \log_a y$:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 4 \\ \log_3 x - \log_3 y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 5 \\ \log_3 x \cdot \log_3 y = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 3 \\ \log_5 x - \log_5 y = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 4 \\ \log_5 x \cdot \log_5 y = 3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 5 \\ \log_5 x \cdot \log_5 y = 4 \end{cases}$

4. Решите системы с тремя переменными:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 y + \log_2 z = 4 \\ \log_2 z + \log_2 x = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ \log_3 y + \log_3 z = 3 \\ \log_3 z + \log_3 x = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ \log_5 y + \log_5 z = 3 \\ \log_5 z + \log_5 x = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 y + \log_2 z = 5 \\ \log_2 z + \log_2 x = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 y + \log_3 z = 4 \\ \log_3 z + \log_3 x = 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 3 \\ \log_5 y + \log_5 z = 4 \\ \log_5 z + \log_5 x = 5 \end{cases}$

5. Решите системы с логарифмами от выражений:

1) $\begin{cases} \log_2(x-y) = 1 \\ \log_2(x+y) = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3(x-y) = 2 \\ \log_3(x+y) = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5(x-y) = 1 \\ \log_5(x+y) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2(x-y) + \log_2(x+y) = 3 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 2 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5(x-y) + \log_5(x+y) = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2(x-y) = 2 \\ \log_2(x+y) = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 \\ \log_3(x+y) = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5(x-y) = 1 \\ \log_5(x+y) = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$

6. Решите системы повышенной сложности:

1) $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 3 \\ \log_4 x + \log_2 y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ \log_9 x + \log_3 y = 2 \\ xy = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_5 x + \log_{25} y = 2 \\ \log_{25} x + \log_5 y = 2 \\ x + y = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 2 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 x \cdot \log_3 y = 3 \\ \log_3 x + \log_3 y = 4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_5 y = 4 \\ \log_5 x + \log_5 y = 5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ \log_2 x^2 + \log_2 y^2 = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \log_3 x^2 + \log_3 y^2 = 6 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 2 \\ \log_5 x^2 + \log_5 y^2 = 4 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x^3 + \log_2 y^3 = 9 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ \log_3 x^4 + \log_3 y^4 = 8 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \log_5 x + \log_5 y = 1 \\ \log_5 x^5 + \log_5 y^5 = 5 \end{cases}$

Простейшие логарифмические неравенства

Теория

В этой главе мы научимся решать простейшие логарифмические неравенства — неравенства вида $\log_a x > b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x \leq b$.

Основное правило: При решении логарифмических неравенств нужно учитывать монотонность логарифмической функции:

- Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ возрастает. Значит:

$$\log_a x > b \quad \Leftrightarrow \quad x > a^b$$

$$\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad x < a^b$$

- Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает. Значит:

$$\log_a x > b \quad \Leftrightarrow \quad x < a^b$$

$$\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad x > a^b$$

ОДЗ: Во всех случаях обязательно $x > 0$.

Нестрогие неравенства: Для $\geq$ и $\leq$ правила те же, но точка $x = a^b$ включается в решение (при условии, что она удовлетворяет ОДЗ).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

$a > 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_2 x > 3$$

ОДЗ: $x > 0$.

Так как основание $2 > 1$, функция возрастает, поэтому:

$$x > 2^3 = 8$$

С учётом ОДЗ: $x > 8$.

Ответ: $x \in (8; +\infty)$.

Пример 2

$a > 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_3 x < 2$$

ОДЗ: $x > 0$.

Основание $3 > 1$, функция возрастает, поэтому:

$$x < 3^2 = 9$$

С учётом ОДЗ: $0 < x < 9$.

Ответ: $x \in (0; 9)$.

Пример 3

$0 < a < 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_{0.5} x > 2$$

ОДЗ: $x > 0$.
Основание $0.5 < 1$, функция убывает, поэтому знак меняется:

$$x < (0.5)^2 = 0.25$$

С учётом ОДЗ: $0 < x < 0.25$.
Ответ: $x \in (0; 0.25)$.

Пример 4

$0 < a < 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_{0.5} x < 2$$

ОДЗ: $x > 0$.
Основание $0.5 < 1$, функция убывает, поэтому:

$$x > (0.5)^2 = 0.25$$

С учётом ОДЗ: $x > 0.25$.
Ответ: $x \in (0.25; +\infty)$.

Пример 5

Нестрогое неравенство

Решим неравенство:

$$\log_2 x \geq 3$$

ОДЗ: $x > 0$.
Основание $2 > 1$, функция возрастает:

$$x \geq 2^3 = 8$$

Ответ: $x \in [8; +\infty)$.

Пример 6

Нестрогое неравенство с основанием меньше 1

Решим неравенство:

$$\log_{0.5} x \geq 2$$

ОДЗ: $x > 0$.
Основание $0.5 < 1$, функция убывает:

$$x \leq (0.5)^2 = 0.25$$

С учётом ОДЗ: $0 < x \leq 0.25$.
Ответ: $x \in (0; 0.25]$.

Пример 7

Сравнение с нулём

Решим неравенство:

$$\log_2 x > 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
$0 = \log_2 1$, поэтому:

$$\log_2 x > \log_2 1 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 8

Сравнение с отрицательным числом

Решим неравенство:

$$\log_3 x < -1$$

ОДЗ: $x > 0$.
$-1 = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$, поэтому:

$$\log_3 x < \log_3 \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{3}$$

С учётом ОДЗ: $0 < x < \frac{1}{3}$.
Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Задачи

1. Решите неравенства ($a > 1$):

1) $\log_2 x > 3$	**4)** $\log_3 x < 3$	**7)** $\log_2 x \geq 4$	**10)** $\log_3 x \leq 4$
2) $\log_2 x < 2$	**5)** $\log_5 x > 1$	**8)** $\log_2 x \leq 3$	**11)** $\log_5 x \geq 2$
3) $\log_3 x > 2$	**6)** $\log_5 x < 2$	**9)** $\log_3 x \geq 2$	**12)** $\log_5 x \leq 1$

2. Решите неравенства ($0 < a < 1$):

1) $\log_{0.5} x > 2$	**4)** $\log_{0.2} x < 3$	**7)** $\log_{0.5} x \geq 3$	**10)** $\log_{0.2} x \leq 4$
2) $\log_{0.5} x < 1$	**5)** $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$	**8)** $\log_{0.5} x \leq 2$	**11)** $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$
3) $\log_{0.2} x > 2$	**6)** $\log_{\frac{1}{3}} x < 2$	**9)** $\log_{0.2} x \geq 1$	**12)** $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$

3. Решите неравенства, сравнивая с нулём:

1) $\log_2 x > 0$	**4)** $\log_3 x < 0$	**7)** $\log_{0.5} x > 0$	**10)** $\log_{0.2} x < 0$
2) $\log_2 x < 0$	**5)** $\log_5 x > 0$	**8)** $\log_{0.5} x < 0$	**11)** $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$
3) $\log_3 x > 0$	**6)** $\log_5 x < 0$	**9)** $\log_{0.2} x > 0$	**12)** $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$

4. Решите неравенства, сравнивая с отрицательными числами:

1) $\log_2 x < -1$	**4)** $\log_3 x < -3$	**7)** $\log_2 x > -1$	**10)** $\log_3 x > -4$
2) $\log_2 x < -2$	**5)** $\log_5 x < -1$	**8)** $\log_2 x > -3$	**11)** $\log_5 x > -1$
3) $\log_3 x < -2$	**6)** $\log_5 x < -2$	**9)** $\log_3 x > -2$	**12)** $\log_5 x > -3$

5. Решите неравенства (смешанные):

1) $\log_2 x \geq 3$	**5)** $\log_{0.2} x \leq 3$	**9)** $\log_5 x \leq -3$
2) $\log_3 x \leq 2$	**6)** $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$	**10)** $\log_{0.5} x < -1$
3) $\log_5 x > 4$	**7)** $\log_2 x < -2$	**11)** $\log_{0.2} x > -2$
4) $\log_{0.5} x \geq 2$	**8)** $\log_3 x > -1$	**12)** $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$

6. Найдите область определения функции:

1) $y = \log_2(x-3)$	**4)** $y = \log_{0.5}(x+4)$	**7)** $y = \log_3(x^2 - 5x + 6)$
2) $y = \log_3(x+2)$	**5)** $y = \log_{\frac{1}{3}}(3-2x)$	**8)** $y = \log_5 \frac{x-1}{x+2}$
3) $y = \log_5(2x-1)$	**6)** $y = \log_2(x^2 - 4)$	**9)** $y = \log_{0.5} \sqrt{x-1}$

10) $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$

11) $y = \log_3(x^2 - 4x + 5)$

12) $y = \log_5(x^2 - 6x + 10)$

Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Теория

В этой главе мы рассмотрим неравенства, где логарифмы с одинаковыми основаниями стоят в обеих частях. Такие неравенства решаются методом потенцирования с учётом монотонности.

Общий вид:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

(а также $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\geq$, $\leq$)

Метод решения:

1. Записываем ОДЗ: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.
2. Учитываем монотонность:
   - Если $a > 1$, то функция возрастает, поэтому знак неравенства сохраняется:
   $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > g(x)$$
   - Если $0 < a < 1$, то функция убывает, поэтому знак неравенства меняется:
   $$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x)$$
3. Решаем полученное неравенство $f(x) > g(x)$ (или $f(x) < g(x)$) с учётом ОДЗ.
4. Находим пересечение решений с ОДЗ.
5. Записываем ответ.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

$a > 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_2(x+3) > \log_2(2x-1)$$

ОДЗ: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$, $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$. Итого $x > \frac{1}{2}$.
Основание $2 > 1$, функция возрастает, поэтому:

$$x + 3 > 2x - 1$$
$$x - 2x > -1 - 3$$
$$-x > -4$$
$$x < 4$$

С учётом ОДЗ: $\frac{1}{2} < x < 4$.
Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

Пример 2

$a > 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3(x+2)$$

ОДЗ: $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$.
Пересечение: $x > 2$.
Основание $3 > 1$, функция возрастает, знак сохраняется:

$$x^2 - 4 < x + 2$$

$$x^2 - x - 6 < 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

Корни: $x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$, $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Неравенство $x^2 - x - 6 < 0$ выполняется при $-2 < x < 3$.

С учётом ОДЗ ($x > 2$) получаем $2 < x < 3$.

Ответ: $x \in (2; 3)$.

Пример 3

$0 < a < 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_{0.5}(x-2) > \log_{0.5}(3-x)$$

ОДЗ: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$, $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$. Итого $2 < x < 3$.

Основание $0.5 < 1$, функция убывает, поэтому знак меняется:

$$x - 2 < 3 - x$$

$$x + x < 3 + 2$$

$$2x < 5$$

$$x < 2.5$$

С учётом ОДЗ: $2 < x < 2.5$.

Ответ: $x \in (2; 2.5)$.

Пример 4

$0 < a < 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$$

ОДЗ: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1.5$. Итого $x > 1.5$.

Основание $\frac{1}{3} < 1$, функция убывает, знак меняется:

$$x + 1 > 2x - 3$$

$$x - 2x > -3 - 1$$

$$-x > -4$$

$$x < 4$$

С учётом ОДЗ: $1.5 < x < 4$.

Ответ: $x \in (1.5; 4)$.

Пример 5

Нестрогое неравенство

Решим неравенство:

$$\log_2(x^2 - 3x) \geq \log_2(x-3)$$

ОДЗ: $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$. Пересечение: $x > 3$.

Основание $2 > 1$, функция возрастает, знак сохраняется:

$$x^2 - 3x \geq x - 3$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

Корни: $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$, $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ выполняется при $x \leq 1$ или $x \geq 3$.

С учётом ОДЗ ($x > 3$) получаем $x \geq 3$, но $x = 3$ не входит в ОДЗ (строгое неравенство в знаменателе). Значит, $x > 3$.

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Пример 6

Неравенство с произведением в ОДЗ

Решим неравенство:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x+2)>\log_2 6$$

Сначала преобразуем левую часть:

$$\log_2((x-1)(x+2))>\log_2 6$$

ОДЗ: $x-1>0\Rightarrow x>1$, $x+2>0\Rightarrow x>-2$. Итого $x>1$.
Основание $2>1$, функция возрастает:

$$(x-1)(x+2)>6$$

$$x^2+2x-x-2>6$$

$$x^2+x-8>0$$

$$D=1+32=33$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$$

$\sqrt{33}\approx 5.74$, поэтому: $x_1=\frac{-1-5.74}{2}=\frac{-6.74}{2}=-3.37$ (не входит в ОДЗ) $x_2=\frac{-1+5.74}{2}=\frac{4.74}{2}=2.37$
Неравенство $x^2+x-8>0$ выполняется при $x<x_1$ или $x>x_2$. С учётом $x>1$ получаем $x>2.37$.
Ответ: $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$.

Пример 7

Неравенство с вычитанием логарифмов

Решим неравенство:

$$\log_3(x+2)-\log_3(x-1)<1$$

Преобразуем левую часть:

$$\log_3\frac{x+2}{x-1}<1$$

ОДЗ: $x+2>0\Rightarrow x>-2$, $x-1>0\Rightarrow x>1$. Итого $x>1$.
$1=\log_3 3$, поэтому:

$$\log_3\frac{x+2}{x-1}<\log_3 3$$

Основание $3>1$, функция возрастает:

$$\frac{x+2}{x-1}<3$$

Решаем неравенство:

$$\frac{x+2}{x-1}-3<0$$

$$\frac{x+2-3(x-1)}{x-1}<0$$

$$\frac{x+2-3x+3}{x-1}<0$$

$$\frac{-2x+5}{x-1}<0$$

Умножаем на -1 (меняем знак неравенства):

$$\frac{2x-5}{x-1}>0$$

Находим нули числителя и знаменателя: $2x-5=0\Rightarrow x=2.5$ $x-1=0\Rightarrow x=1$
Метод интервалов:

- При $x<1$: числитель отрицательный, знаменатель отрицательный — дробь положительная? Но $x<1$ не входит в ОДЗ.
- При $1<x<2.5$: числитель отрицательный, знаменатель положительный — дробь отрицательная.
- При $x>2.5$: числитель положительный, знаменатель положительный — дробь положительная.

Нам нужны $x>2.5$ (с учётом ОДЗ $x>1$).
Ответ: $x\in(2.5;+\infty)$.

Задачи

1. Решите неравенства ($a > 1$):

1) $\log_2(x+1) > \log_2 3$

2) $\log_2(x-2) < \log_2 5$

3) $\log_3(2x-1) > \log_3(x+2)$

4) $\log_3(x+4) < \log_3(2x-1)$

5) $\log_5(x-2) > \log_5(3-x)$

6) $\log_5(2x+1) < \log_5(x-3)$

7) $\log_2(x^2-4) > \log_2(x-2)$

8) $\log_3(x^2-9) < \log_3(x+3)$

9) $\log_5(x^2-16) > \log_5(x-4)$

10) $\log_2(x^2-3x) \geq \log_2(x-3)$

11) $\log_3(x^2-5x) \leq \log_3(2x-10)$

12) $\log_5(x^2+x) \geq \log_5(x+1)$

2. Решите неравенства ($0 < a < 1$):

1) $\log_{0.5}(x+1) > \log_{0.5} 3$

2) $\log_{0.5}(x-2) < \log_{0.5} 5$

3) $\log_{0.2}(2x-1) > \log_{0.2}(x+2)$

4) $\log_{0.2}(x+4) < \log_{0.2}(2x-1)$

5) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) > \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$

6) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) < \log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

7) $\log_{0.5}(x^2-4) > \log_{0.5}(x-2)$

8) $\log_{0.2}(x^2-9) < \log_{0.2}(x+3)$

9) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-16) > \log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

10) $\log_{0.5}(x^2-3x) \geq \log_{0.5}(x-3)$

11) $\log_{0.2}(x^2-5x) \leq \log_{0.2}(2x-10)$

12) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

3. Найдите ОДЗ и решите неравенства:

1) $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) > \log_2 6$

2) $\log_3(x+1) + \log_3(x-2) < \log_3 4$

3) $\log_5(x-1) + \log_5(x+3) > \log_5 8$

4) $\log_2(x-2) - \log_2(x+1) < \log_2 0.5$

5) $\log_3(x+3) - \log_3(x-1) > \log_3 2$

6) $\log_5(2x-1) - \log_5(x+2) < \log_5 3$

7) $\log_2 \frac{x-1}{x+2} > \log_2 \frac{x+1}{x-2}$

8) $\log_3 \frac{x+2}{x-3} < \log_3 \frac{x-1}{x+4}$

9) $\log_5 \frac{2x-1}{x+3} > \log_5 \frac{x+2}{3x-1}$

4. Решите неравенства (смешанные):

1) $\log_2(x+1) > \log_2(3x-5)$

2) $\log_3(2x-1) < \log_3(x+4)$

3) $\log_5(x-2) \geq \log_5(4-x)$

4) $\log_{0.5}(x+3) > \log_{0.5}(2x-1)$

5) $\log_{0.2}(x-1) < \log_{0.2}(5-2x)$

6) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

7) $\log_2(x^2-3x+2) > \log_2(x-1)$

8) $\log_3(x^2-4x+3) < \log_3(x-1)$

9) $\log_5(x^2-5x+6) \geq \log_5(x-2)$

5. Решите неравенства повышенной сложности:

1) $\log_2(x^2-4x) \geq \log_2(x-4)$

2) $\log_3(x^2-6x) \leq \log_3(2x-12)$

3) $\log_5(x^2-8x) \geq \log_5(x-8)$

4) $\log_2(x^2-5x+6) > \log_2(x-2)$

5) $\log_3(x^2-7x+10) < \log_3(x-2)$

6) $\log_5(x^2-8x+15) \geq \log_5(x-3)$

7) $\log_2 \frac{x^2-1}{x+2} > \log_2 \frac{x-1}{x+2}$

8) $\log_3 \frac{x^2-4}{x-1} < \log_3 \frac{x+2}{x-1}$

9) $\log_5 \frac{x^2-9}{x+1} \geq \log_5 \frac{x-3}{x+1}$

Неравенства вида $\log_a f(x) > b$

Теория

В этой главе мы рассмотрим неравенства, где в правой части стоит число. Такие неравенства сводятся к простейшим с помощью определения логарифма.

Общий вид:

$$\log_a f(x) > b$$

(а также $\log_a f(x) < b$, $\geq$, $\leq$)

Метод решения:

1. Записываем ОДЗ: $f(x) > 0$.
2. Представляем число b в виде логарифма: $b = \log_a a^b$.
3. Учитываем монотонность:
   - Если $a > 1$, то функция возрастает, поэтому:
   $$\log_a f(x) > \log_a a^b \quad \Rightarrow \quad f(x) > a^b$$
   - Если $0 < a < 1$, то функция убывает, поэтому:
   $$\log_a f(x) > \log_a a^b \quad \Rightarrow \quad f(x) < a^b$$
4. Решаем полученное неравенство $f(x) > a^b$ (или $f(x) < a^b$) с учётом ОДЗ.
5. Находим пересечение решений с ОДЗ.
6. Записываем ответ.

Особые случаи:

- Если $b = 0$, то $a^b = 1$, и неравенство сводится к сравнению $f(x)$ с 1.
- Если b отрицательное, то a^b — число меньше 1, но метод тот же.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

$a > 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_2(x-1) > 3$$

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.
$3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$.
Основание $2 > 1$, функция возрастает:

$$x - 1 > 8$$
$$x > 9$$

С учётом ОДЗ: $x > 9$.
Ответ: $x \in (9; +\infty)$.

Пример 2

$a > 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_3(x+2) < 2$$

ОДЗ: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$.
$2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$.

Основание $3 > 1$, функция возрастает:

$$x + 2 < 9$$
$$x < 7$$

С учётом ОДЗ: $-2 < x < 7$.
Ответ: $x \in (-2; 7)$.

Пример 3

$0 < a < 1$, знак $>$

Решим неравенство:

$$\log_{0.5}(x - 2) > 1$$

ОДЗ: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.
$1 = \log_{0.5} 0.5^1 = \log_{0.5} 0.5$.
Основание $0.5 < 1$, функция убывает, знак меняется:

$$x - 2 < 0.5$$
$$x < 2.5$$

С учётом ОДЗ: $2 < x < 2.5$.
Ответ: $x \in (2; 2.5)$.

Пример 4

$0 < a < 1$, знак $<$

Решим неравенство:

$$\log_{0.5}(x + 3) < 2$$

ОДЗ: $x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.
$2 = \log_{0.5} 0.5^2 = \log_{0.5} 0.25$.
Основание $0.5 < 1$, функция убывает:

$$x + 3 > 0.25$$
$$x > -2.75$$

С учётом ОДЗ: $x > -2.75$.
Ответ: $x \in (-2.75; +\infty)$.

Пример 5

Нестрогое неравенство

Решим неравенство:

$$\log_2(x^2 - 3x) \geq 2$$

ОДЗ: $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
$2 = \log_2 4$.
Основание $2 > 1$, функция возрастает:

$$x^2 - 3x \geq 4$$
$$x^2 - 3x - 4 \geq 0$$
$$D = 9 + 16 = 25$$
$$x_1 = \frac{3 - 5}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

Неравенство $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ выполняется при $x \leq -1$ или $x \geq 4$.
С учётом ОДЗ: $x \leq -1$ пересекается с $(-\infty; 0)$ даёт $x \leq -1$; $x \geq 4$ пересекается с $(3; +\infty)$ даёт $x \geq 4$.
Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Пример 6

Неравенство с отрицательным b

Решим неравенство:

$$\log_2(x-1) < -1$$

ОДЗ: $x > 1$.
$-1 = \log_2 2^{-1} = \log_2 \frac{1}{2}$.
Основание $2 > 1$, функция возрастает:

$$x - 1 < \frac{1}{2}$$
$$x < 1.5$$

С учётом ОДЗ: $1 < x < 1.5$.
Ответ: $x \in (1; 1.5)$.

Пример 7

Неравенство с $b = 0$

Решим неравенство:

$$\log_3(x^2-4) > 0$$

ОДЗ: $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
$0 = \log_3 1$.
Основание $3 > 1$, функция возрастает:

$$x^2 - 4 > 1$$
$$x^2 > 5$$
$$x < -\sqrt{5} \quad \text{или} \quad x > \sqrt{5}$$

С учётом ОДЗ: $x < -\sqrt{5}$ пересекается с $(-\infty; -2)$ даёт $x < -\sqrt{5}$ (так как $\sqrt{5} \approx 2.236 > 2$), а $x > \sqrt{5}$ пересекается с $(2; +\infty)$ даёт $x > \sqrt{5}$.
Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 8

Неравенство с квадратным трёхчленом

Решим неравенство:

$$\log_5(x^2 - 3x + 2) \le 1$$

ОДЗ: $x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.
$1 = \log_5 5$.
Основание $5 > 1$, функция возрастает:

$$x^2 - 3x + 2 \le 5$$
$$x^2 - 3x - 3 \le 0$$
$$D = 9 + 12 = 21$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$\sqrt{21} \approx 4.58$, поэтому: $x_1 \approx \frac{3-4.58}{2} = \frac{-1.58}{2} = -0.79$ $x_2 \approx \frac{3+4.58}{2} = \frac{7.58}{2} = 3.79$
Неравенство $x^2 - 3x - 3 \le 0$ выполняется при $x_1 \le x \le x_2$.
С учётом ОДЗ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ пересекаем с $[-0.79; 3.79]$:

- $(-\infty; 1) \cap [-0.79; 3.79] = [-0.79; 1)$
- $(2; +\infty) \cap [-0.79; 3.79] = (2; 3.79]$

Ответ: $x \in \left[\frac{3-\sqrt{21}}{2}; 1\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Задачи

1. Решите неравенства ($a > 1$, простая линейная функция):

1) $\log_2(x-1) > 3$
2) $\log_2(x+2) < 2$
3) $\log_3(x-2) > 1$
4) $\log_3(x+1) < 2$
5) $\log_5(x-3) > 0$
6) $\log_5(x+4) < 1$
7) $\log_2(2x-1) > 4$
8) $\log_3(3x+2) < 3$
9) $\log_5(5x-2) > 2$
10) $\log_2(x+5) \geq 3$
11) $\log_3(x-4) \leq 2$
12) $\log_5(x+6) \geq 1$

2. Решите неравенства ($0 < a < 1$, простая линейная функция):

1) $\log_{0.5}(x-1) > 2$
2) $\log_{0.5}(x+2) < 1$
3) $\log_{0.2}(x-2) > 1$
4) $\log_{0.2}(x+3) < 2$
5) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) < 1$
7) $\log_{0.5}(2x-1) > 3$
8) $\log_{0.2}(3x+1) < 2$
9) $\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) > 2$
10) $\log_{0.5}(x+4) \geq 2$
11) $\log_{0.2}(x-3) \leq 1$
12) $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) \geq 1$

3. Решите неравенства с квадратными трёхчленами:

1) $\log_2(x^2-4) > 2$
2) $\log_3(x^2-9) < 2$
3) $\log_5(x^2-16) > 1$
4) $\log_2(x^2-3x) \geq 2$
5) $\log_3(x^2-4x) \leq 2$
6) $\log_5(x^2-5x) \geq 1$
7) $\log_2(x^2-3x+2) > 1$
8) $\log_3(x^2-4x+3) < 1$
9) $\log_5(x^2-5x+6) > 0$
10) $\log_2(x^2-6x+8) \leq 2$
11) $\log_3(x^2-7x+10) \geq 2$
12) $\log_5(x^2-8x+15) \leq 1$

4. Решите неравенства с отрицательным b:

1) $\log_2(x-1) < -1$
2) $\log_2(x+2) > -2$
3) $\log_3(x-2) < -2$
4) $\log_3(x+1) > -1$
5) $\log_5(x-3) < -1$
6) $\log_5(x+4) > -2$
7) $\log_{0.5}(x-1) < -1$
8) $\log_{0.5}(x+2) > -2$
9) $\log_{0.2}(x-2) < -1$
10) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > -2$
11) $\log_2(x^2-4) < -1$
12) $\log_3(x^2-9) > -2$

5. Решите неравенства с $b = 0$:

1) $\log_2(x-1) > 0$
2) $\log_2(x+2) < 0$
3) $\log_3(x-2) > 0$
4) $\log_3(x+1) < 0$
5) $\log_5(x-3) > 0$
6) $\log_5(x+4) < 0$
7) $\log_{0.5}(x-1) > 0$
8) $\log_{0.5}(x+2) < 0$
9) $\log_{0.2}(x-2) > 0$
10) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 0$
11) $\log_2(x^2-4) > 0$
12) $\log_3(x^2-9) < 0$

6. Решите неравенства повышенной сложности:

1) $\log_2(x^2-3x+2) \geq 2$
2) $\log_3(x^2-5x+6) \leq 2$
3) $\log_5(x^2-7x+10) \geq 1$
4) $\log_2(x^2-4x+3) < 2$
5) $\log_3(x^2-6x+8) > 2$
6) $\log_5(x^2-8x+12) \leq 1$
7) $\log_2 \frac{x-1}{x+2} > 1$
8) $\log_3 \frac{x+1}{x-2} < 2$
9) $\log_5 \frac{2x-1}{x+3} \geq 0$
10) $\log_2 \sqrt{x-1} > 1$
11) $\log_3 \sqrt{x+2} < 2$
12) $\log_5 \sqrt[3]{x-2} \geq 1$

Неравенства с переменным основанием

Теория

В этой главе мы рассмотрим логарифмические неравенства, в которых основание логарифма содержит переменную. Такие неравенства требуют особого внимания к ОДЗ и учёта знака основания.

Общий вид:

$$\log_{f(x)} g(x) > 0, \quad \log_{f(x)} g(x) < 0, \quad \log_{f(x)} g(x) > b, \quad \log_{f(x)} g(x) < b$$

и аналогично с нестрогими знаками.

ОДЗ:

- Основание $f(x)$ должно быть положительным и не равным единице:

$$f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1$$

- Аргумент $g(x)$ должен быть положительным:

$$g(x) > 0$$

Метод решения (для сравнения с нулём):

Для неравенств вида $\log_{f(x)} g(x) > 0$ или < 0 удобно использовать метод рационализации или рассматривать два случая в зависимости от основания.

Рассмотрим $\log_{f(x)} g(x) > 0$.

- Если $f(x) > 1$, то функция возрастает, и неравенство равносильно $g(x) > 1$.
- Если $0 < f(x) < 1$, то функция убывает, и неравенство равносильно $0 < g(x) < 1$.

Таким образом, нужно рассмотреть два случая и объединить решения.

Аналогично для $\log_{f(x)} g(x) < 0$:

- Если $f(x) > 1$, то $0 < g(x) < 1$.
- Если $0 < f(x) < 1$, то $g(x) > 1$.

Метод рационализации:

Неравенство $\log_{f(x)} g(x) > 0$ равносильно системе:

$$(f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1, \quad g(x) > 0$$

А неравенство $\log_{f(x)} g(x) < 0$ равносильно:

$$(f(x) - 1)(g(x) - 1) < 0, \quad f(x) > 0, \quad f(x) \neq 1, \quad g(x) > 0$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Сравнение с нулём, два случая

Решим неравенство:

$$\log_x (x + 2) > 0$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Итого $x > 0$, $x \neq 1$.

Рассмотрим два случая:

1) $x > 1$ (основание больше 1). Тогда неравенство равносильно $x + 2 > 1 \Rightarrow x > -1$. С учётом $x > 1$ получаем $x > 1$.

2) $0 < x < 1$ (основание меньше 1). Тогда неравенство равносильно $0 < x + 2 < 1 \Rightarrow -2 < x < -1$. Но это противоречит условию $0 < x < 1$. Решений нет.

Объединяем: $x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 2

Метод рационализации

Решим то же неравенство методом рационализации:

$$\log_x(x+2) > 0$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x + 2 > 0$ (последнее выполняется при $x > 0$).

Применяем метод рационализации:

$$(x-1)((x+2)-1) > 0$$

$$(x-1)(x+1) > 0$$

Решаем методом интервалов: Нули: $x = 1$, $x = -1$. Знаки: при $x < -1$: $(-)\cdot(-) = +$; при $-1 < x < 1$: $(-)\cdot(+) = -$; при $x > 1$: $(+)\cdot(+) = +$.

Решение: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

С учётом ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$) получаем $x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$ (совпадает с предыдущим).

Пример 3

Сравнение с нулём, знак <

Решим неравенство:

$$\log_{x-1}(2x-3) < 0$$

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$, $x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$, $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 1.5$. Итого $x > 1.5$, $x \neq 2$.

Применяем метод рационализации:

$$((x-1)-1)((2x-3)-1) < 0$$

$$(x-2)(2x-4) < 0$$

$$(x-2)\cdot 2(x-2) < 0$$

$$2(x-2)^2 < 0$$

Квадрат числа не может быть отрицательным. Решений нет.

Ответ: решений нет.

Пример 4

Сравнение с положительным числом

Решим неравенство:

$$\log_x(x+1) > 1$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$, $x + 1 > 0$ (выполняется при $x > 0$).

Представим 1 как $\log_x x$:

$$\log_x(x+1) > \log_x x$$

Рассмотрим два случая:

1) $x > 1$: функция возрастает, тогда $x + 1 > x \Rightarrow 1 > 0$ — верно для всех $x > 1$.

2) $0 < x < 1$: функция убывает, тогда $x + 1 < x \Rightarrow 1 < 0$ — неверно.

Таким образом, решение $x > 1$.

Ответ: $x \in (1; +\infty)$.

Пример 5

Сравнение с отрицательным числом

Решим неравенство:

$$\log_x 2 < -1$$

ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

$-1 = \log_x x^{-1} = \log_x \frac{1}{x}$.

Рассмотрим два случая:

1) $x > 1$: функция возрастает, тогда $2 < \frac{1}{x} \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < 0.5$ — противоречие с $x > 1$.
2) $0 < x < 1$: функция убывает, тогда $2 > \frac{1}{x} \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > 0.5$.
С учётом $0 < x < 1$ получаем $0.5 < x < 1$.
Ответ: $x \in (0.5; 1)$.

Пример 6

Неравенство с квадратными выражениями

Решим неравенство:

$$\log_{x^2-3x+2} 4 > 0$$

ОДЗ: основание $x^2 - 3x + 2 > 0$ и $\neq 1$, аргумент $4 > 0$ автоматически.
$x^2-3x+2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$. Также $x^2-3x+2 \neq 1 \Rightarrow x^2-3x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Применяем метод рационализации:

$$(x^2 - 3x + 2 - 1)(4 - 1) > 0$$

$$(x^2 - 3x + 1) \cdot 3 > 0$$

$$x^2 - 3x + 1 > 0$$

Решаем квадратное неравенство: $D = 9 - 4 = 5$, корни $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Неравенство $x^2 - 3x + 1 > 0$ выполняется при $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ или $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

С учётом ОДЗ ($x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$) и исключая точки, где основание равно 1, получаем:

- $(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ — входит в ОДЗ (это примерно $x < 0.38$)
- $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$ — входит в ОДЗ (это примерно $x > 2.62$)

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Задачи

1. Решите неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) > 0$:

1) $\log_x(x+1) > 0$
2) $\log_x(x+2) > 0$
3) $\log_x(2x-1) > 0$
4) $\log_{x-1}(x+1) > 0$
5) $\log_{x+1}(x+3) > 0$
6) $\log_{2x-1}(x+2) > 0$
7) $\log_{x^2} 4 > 0$
8) $\log_{x^2} 9 > 0$
9) $\log_{x^2} 16 > 0$
10) $\log_{x^2-4} 5 > 0$
11) $\log_{x^2-9} 7 > 0$
12) $\log_{x^2-16} 3 > 0$

2. Решите неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) < 0$:

1) $\log_x(x+1) < 0$
2) $\log_x(x+2) < 0$
3) $\log_x(2x-1) < 0$
4) $\log_{x-1}(x+1) < 0$
5) $\log_{x+1}(x+3) < 0$
6) $\log_{2x-1}(x+2) < 0$
7) $\log_{x^2} 4 < 0$
8) $\log_{x^2} 9 < 0$
9) $\log_{x^2} 16 < 0$
10) $\log_{x^2-4} 5 < 0$
11) $\log_{x^2-9} 7 < 0$
12) $\log_{x^2-16} 3 < 0$

3. Решите неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) > 1$:

1) $\log_x(x+1) > 1$
2) $\log_x(x+2) > 1$
3) $\log_x(2x-1) > 1$
4) $\log_{x-1}(x+1) > 1$
5) $\log_{x+1}(x+3) > 1$
6) $\log_{2x-1}(x+2) > 1$
7) $\log_x 2 > 1$
8) $\log_x 3 > 1$
9) $\log_x 4 > 1$
10) $\log_{x-1} 2 > 1$
11) $\log_{x+1} 3 > 1$
12) $\log_{2x-1} 4 > 1$

4. Решите неравенства вида $\log_{f(x)} g(x) < 1$:

1) $\log_x(x+1) < 1$

2) $\log_x(x+2) < 1$

3) $\log_x(2x-1) < 1$

4) $\log_{x-1}(x+1) < 1$

5) $\log_{x+1}(x+3) < 1$

6) $\log_{2x-1}(x+2) < 1$

7) $\log_x 2 < 1$

8) $\log_x 3 < 1$

9) $\log_x 4 < 1$

10) $\log_{x-1} 2 < 1$

11) $\log_{x+1} 3 < 1$

12) $\log_{2x-1} 4 < 1$

5. Найдите ОДЗ и решите неравенства (методом рационализации):

1) $\log_{x^2-3x+2} 4 > 0$

2) $\log_{x^2-4x+3} 9 < 0$

3) $\log_{x^2-5x+6} 5 > 0$

4) $\log_{x^2-6x+8} 7 < 0$

5) $\log_{x^2-7x+10} 3 > 0$

6) $\log_{x^2-8x+15} 2 < 0$

7) $\log_{x^2-3x} 4 > 1$

8) $\log_{x^2-4x} 9 < 1$

9) $\log_{x^2-5x} 5 > 1$

6. Решите неравенства повышенной сложности:

1) $\log_x(x^2-2x+1) > 0$

2) $\log_x(x^2-4x+4) < 0$

3) $\log_x(x^2-6x+9) > 1$

4) $\log_{x-1}(x^2-2x+1) < 1$

5) $\log_{x+1}(x^2+2x+1) > 0$

6) $\log_{2x-1}(4x^2-4x+1) < 0$

7) $\log_{x^2}(x^2+2x+1) > 0$

8) $\log_{x^2}(x^2-4x+4) < 0$

9) $\log_{x^2-4}(x^2-4x+4) > 1$

10) $\log_{x^2-9}(x^2-6x+9) < 1$

11) $\log_{x^2-16}(x^2-8x+16) > 0$

12) $\log_{x^2-25}(x^2-10x+25) < 0$

Практика по блоку 4

Теория

В этом блоке мы изучили логарифмические неравенства:

- Простейшие логарифмические неравенства (глава 13)
- Неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (глава 14)
- Неравенства вида $\log_a f(x) > b$ (глава 15)
- Неравенства с переменным основанием (глава 16)

Основные методы решения:

- Учёт монотонности логарифмической функции в зависимости от основания
- Потенцирование с учётом ОДЗ
- Метод рационализации для неравенств с переменным основанием
- Сведение к простейшим неравенствам

В этой главе собраны задачи на все эти типы неравенств вперемешку. Ваша задача — определить, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите простейшие логарифмические неравенства:

1) $\log_2 x > 3$
2) $\log_3 x < 2$
3) $\log_5 x \geq 1$
4) $\log_2 x \leq 4$
5) $\log_{0.5} x > 2$
6) $\log_{0.2} x < 1$
7) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$
8) $\log_{0.5} x \leq 3$
9) $\log_2 x > 0$
10) $\log_3 x < 0$
11) $\log_5 x > -1$
12) $\log_{0.5} x < -2$

2. Решите неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$:

1) $\log_2(x+1) > \log_2 3$
2) $\log_3(x-2) < \log_3 5$
3) $\log_5(2x-1) > \log_5(x+2)$
4) $\log_2(x^2-4) > \log_2(x-2)$
5) $\log_3(x^2-9) < \log_3(x+3)$
6) $\log_5(x^2-16) > \log_5(x-4)$
7) $\log_{0.5}(x+1) > \log_{0.5} 3$
8) $\log_{0.2}(x-2) < \log_{0.2} 5$
9) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

3. Решите неравенства вида $\log_a f(x) > b$:

1) $\log_2(x-1) > 3$
2) $\log_3(x+2) < 2$
3) $\log_5(2x-1) \geq 1$
4) $\log_2(x^2-4) > 2$
5) $\log_3(x^2-9) < 2$
6) $\log_5(x^2-16) \geq 1$
7) $\log_{0.5}(x-1) > 2$
8) $\log_{0.2}(x+2) < 1$
9) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \geq 2$

4. Решите неравенства с переменным основанием:

1) $\log_x(x+1) > 0$
2) $\log_x(x+2) < 0$
3) $\log_{x-1}(x+1) > 0$
4) $\log_{x+1}(x+3) < 0$
5) $\log_x(x+1) > 1$
6) $\log_x(x+2) < 1$
7) $\log_x 2 > 1$
8) $\log_x 3 < 1$
9) $\log_{x-1} 2 > 1$
10) $\log_{x+1} 3 < 1$
11) $\log_{x^2} 4 > 0$
12) $\log_{x^2} 9 < 0$

5. Найдите ОДЗ и решите неравенства (смешанные):

1) $\log_2(x-1)+\log_2(x+2)>2$

2) $\log_3(x+1)-\log_3(x-2)<1$

3) $\log_5(x-1)\cdot\log_5(x-2)>0$

4) $\log_2^2 x-3\log_2 x+2>0$

5) $\log_3^2 x-2\log_3 x-3<0$

6) $\log_5^2 x-\log_5 x-2\geq 0$

7) $\log_2 x+\log_4 x>3$

8) $\log_3 x+\log_9 x<2$

9) $\log_5 x+\log_{25} x\geq 2$

6. Решите неравенства повышенной сложности:

1) $\log_2(x^2-3x+2)\geq\log_2(x-1)$

2) $\log_3(x^2-5x+6)<\log_3(x-2)$

3) $\log_5(x^2-7x+10)>\log_5(x-2)$

4) $\log_2\frac{x-1}{x+2}>1$

5) $\log_3\frac{x+1}{x-2}<1$

6) $\log_5\frac{2x-1}{x+3}\geq 0$

7) $\log_{x-1}(x^2-3x+2)>0$

8) $\log_{x+1}(x^2+2x+1)<0$

9) $\log_{2x-1}(4x^2-4x+1)\geq 1$

10) $\log_2 x\cdot\log_2(x-1)<0$

11) $\log_3 x\cdot\log_3(x-2)>0$

12) $\log_5 x\cdot\log_5(x-3)\leq 0$

Уравнения, содержащие логарифмы и другие функции

Теория

В этой главе мы рассмотрим уравнения, в которых логарифмы встречаются вместе с другими функциями — степенными, показательными, тригонометрическими и т.д. Такие уравнения часто решаются методами, комбинирующими свойства разных функций.

Основные типы:

- Уравнения вида $P(\log_a x) = 0$, где P — многочлен (уже рассматривали)
- Уравнения вида $\log_a f(x) = g(x)$, где $g(x)$ — не константа
- Уравнения, содержащие логарифмы и степени
- Уравнения, содержащие логарифмы и показательные функции
- Уравнения, содержащие логарифмы и корни

Методы решения:

- Сведение к квадратным заменой переменной
- Использование монотонности функций
- Графический метод (особенно когда уравнение не решается аналитически)
- Метод оценок (если одна функция ограничена)
- Использование свойств логарифмов для упрощения

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Логарифм и квадратичная функция

Решим уравнение:

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$$

Это уравнение уже знакомо нам по главе 4. Оно решается заменой $t = \log_2 x$:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 2$, $x = 4$.

Пример 2

Логарифм и показательная функция

Решим уравнение:

$$\log_2 x = 3 - x$$

ОДЗ: $x > 0$.

Это уравнение не решается аналитически, но можно заметить, что левая часть возрастает, а правая убывает. Значит, уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$:

$$\log_2 2 = 1, \quad 3 - 2 = 1$$

Других корней нет.

Ответ: $x = 2$.

Пример 3

Логарифм и корень

Решим уравнение:

$$\log_2 x = \sqrt{x-1}$$

ОДЗ: $x > 0$ и $x \geq 1$, итого $x \geq 1$.

Обе функции возрастают, но сравнить сложно. Попробуем подобрать корень: $x = 1$: $\log_2 1 = 0$, $\sqrt{0} = 0$ — подходит. $x = 2$: $\log_2 2 = 1$, $\sqrt{1} = 1$ — подходит. $x = 4$: $\log_2 4 = 2$, $\sqrt{3} \approx 1.732$ — не подходит. $x = 1.5$: $\log_2 1.5 \approx 0.585$, $\sqrt{0.5} \approx 0.707$ — не равно.

Таким образом, два корня: $x = 1$ и $x = 2$.

Ответ: $x = 1$, $x = 2$.

Пример 4

Логарифм и тригонометрическая функция

Решим уравнение:

$$\log_2(\sin x) = -1$$

ОДЗ: $\sin x > 0$.

По определению логарифма: $\sin x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Решаем тригонометрическое уравнение:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Проверяем ОДЗ: при этих значениях $\sin x = \frac{1}{2} > 0$, значит, все подходят.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5

Логарифм и степень

Решим уравнение:

$$\log_2 x = 2^{\log_2 x - 1}$$

ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $t = \log_2 x$. Тогда уравнение принимает вид:

$$t = 2^{t-1}$$

$$t = \frac{2^t}{2}$$

$$2t = 2^t$$

Исследуем функцию $f(t) = 2^t - 2t$. $t = 1$: $2^1 - 2 = 0$ — корень. $t = 2$: $2^2 - 4 = 0$ — ещё корень. $t = 0$: $2^0 - 0 = 1$ — не корень. $t = 3$: $2^3 - 6 = 8 - 6 = 2$ — не корень.

Таким образом, $t = 1$ и $t = 2$ — корни. Возвращаемся:

$$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

Ответ: $x = 2$, $x = 4$.

Пример 6

Логарифм от логарифма

Решим уравнение:

$$\log_2(\log_3 x) = 1$$

ОДЗ: $\log_3 x > 0 \Rightarrow x > 1$, и $x > 0$ из первого логарифма, итого $x > 1$.

По определению: $\log_3 x = 2^1 = 2$. Тогда $x = 3^2 = 9$, что удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x = 9$.

Пример 7

Сумма логарифма и степени

Решим уравнение:

$$\log_2 x + 2^{\log_2 x} = 3$$

ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $t = \log_2 x$. Тогда $2^{\log_2 x} = 2^t$.

Уравнение: $t + 2^t = 3$. Подбираем корни: $t = 1$: $1 + 2 = 3$ — подходит. $t = 0$: $0 + 1 = 1$ — не подходит. $t = 2$: $2 + 4 = 6$ — не подходит.

Функция $f(t) = t + 2^t$ возрастает, поэтому корень единственный. $t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Задачи

1. Решите уравнения, сводящиеся к квадратным заменой:

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

2) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$

3) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$

4) $\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) + 2 = 0$

5) $\log_3^2(x+2) - 2\log_3(x+2) - 3 = 0$

6) $\log_5^2(x-2) - 4\log_5(x-2) + 3 = 0$

7) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

8) $\log_3 x + \log_9 x = 2$

9) $\log_5 x + \log_{25} x = 2$

2. Решите уравнения, используя подбор корня (монотонность):

1) $\log_2 x = 3 - x$

2) $\log_3 x = 4 - x$

3) $\log_5 x = 2 - x$

4) $\log_2 x = \sqrt{x}$

5) $\log_3 x = \sqrt{x-1}$

6) $\log_5 x = \sqrt{x+1}$

7) $\log_2 x = x - 1$

8) $\log_3 x = 2x - 5$

9) $\log_5 x = 3x - 8$

3. Решите уравнения с логарифмами от выражений:

1) $\log_2(\log_3 x) = 1$

2) $\log_3(\log_2 x) = 2$

3) $\log_5(\log_2 x) = 0$

4) $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$

5) $\log_3(\log_5(\log_2 x)) = 1$

6) $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x)$

7) $\log_2(\sin x) = -1$

8) $\log_3(\cos x) = 0$

9) $\log_5(\operatorname{tg} x) = 0$

4. Решите уравнения с показательной функцией:

1) $2^{\log_2 x} + \log_2 x = 3$

2) $3^{\log_3 x} + \log_3 x = 4$

3) $5^{\log_5 x} - \log_5 x = 4$

4) $\log_2 x + 2^{\log_2 x - 1} = 2$

5) $\log_3 x + 3^{\log_3 x - 1} = 2$

6) $\log_5 x + 5^{\log_5 x - 2} = 2$

7) $2^{\log_2 x} \cdot \log_2 x = 2$

8) $3^{\log_3 x} \cdot \log_3 x = 6$

9) $5^{\log_5 x} \cdot \log_5 x = 10$

5. Решите уравнения с корнями:

1) $\log_2 x = \sqrt{x-1}$

2) $\log_3 x = \sqrt{x+1}$

3) $\log_5 x = \sqrt{x-2}$

4) $\log_2 x = \sqrt[3]{x-1}$

5) $\log_3 x = \sqrt[4]{x+1}$

6) $\log_5 x = \sqrt[3]{x-2}$

7) $\log_2 x = \sqrt{x} - 1$

8) $\log_3 x = \sqrt{x} - 2$

9) $\log_5 x = \sqrt{x} + 1$

6. Решите уравнения повышенной сложности:

1) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

2) $\log_2 x + \log_4 x = \log_8 x$

3) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_4 x$

4) $\log_2^2 x + \log_2 x^2 - 3 = 0$

5) $\log_3^2 x + 2\log_3 x^3 - 7 = 0$

6) $\log_5^2 x - 3\log_5 x^5 + 4 = 0$

7) $\log_2 x \cdot \log_2(x-1) = 1$

8) $\log_3 x \cdot \log_3(x-2) = 1$

9) $\log_5 x \cdot \log_5(x-3) = 1$

10) $x^{\log_2 x} = 4$

11) $x^{\log_3 x} = 9$

12) $x^{\log_5 x} = 25$

Неравенства, содержащие логарифмы и другие функции

Теория

В этой главе мы рассмотрим неравенства, в которых логарифмы встречаются вместе с другими функциями — степенными, показательными, тригонометрическими и т.д. Такие неравенства часто требуют нестандартных подходов и комбинации различных методов.

Основные типы:

- Неравенства вида $P(\log_a x) > 0$, где P — многочлен
- Неравенства, содержащие логарифмы и степени
- Неравенства, содержащие логарифмы и показательные функции
- Неравенства, содержащие логарифмы и корни

Методы решения:

- Сведение к квадратным неравенствам заменой переменной
- Использование монотонности функций
- Метод интервалов с учётом ОДЗ
- Метод оценок (если одна функция ограничена)
- Графический метод (для приближённого решения или оценки количества решений)

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

Пример 1

Квадратное неравенство относительно логарифма

Решим неравенство:

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 > 0$$

ОДЗ: $x > 0$.
Пусть $t = \log_2 x$. Тогда неравенство принимает вид:

$$t^2 - 3t + 2 > 0$$

$$(t-1)(t-2) > 0$$

Решаем методом интервалов: $t < 1$ или $t > 2$.
Возвращаемся к x:

$$\log_2 x < 1 \Rightarrow x < 2$$

$$\log_2 x > 2 \Rightarrow x > 4$$

С учётом ОДЗ ($x > 0$) получаем:

$$0 < x < 2 \quad \text{или} \quad x > 4$$

Ответ: $x \in (0; 2) \cup (4; +\infty)$.

Пример 2

Неравенство с логарифмом и корнем

Решим неравенство:

$$\log_2 x > \sqrt{x-1}$$

ОДЗ: $x > 0$ и $x \geq 1$, итого $x \geq 1$.
Это неравенство не решается аналитически. Исследуем функцию $f(x) = \log_2 x - \sqrt{x-1}$.
Найдём корни уравнения $\log_2 x = \sqrt{x-1}$ из предыдущей главы: $x = 1$ и $x = 2$.
Проверим знаки на промежутках:

- При $x \in (1; 2)$: возьмём $x = 1.5$: $\log_2 1.5 \approx 0.585$, $\sqrt{0.5} \approx 0.707$, значит $\log_2 x < \sqrt{x-1}$.
- При $x > 2$: возьмём $x = 3$: $\log_2 3 \approx 1.585$, $\sqrt{2} \approx 1.414$, значит $\log_2 x > \sqrt{x-1}$.

Таким образом, неравенство выполняется при $x > 2$.
Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

Пример 3

Неравенство с логарифмом и показательной функцией

Решим неравенство:

$$\log_2 x < 2 - x$$

ОДЗ: $x > 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_2 x + x - 2$. Найдём корень уравнения $\log_2 x = 2 - x$ подбором: $x = 1$: $\log_2 1 = 0$, $2-1 = 1$ — не корень. $x = 2$: $\log_2 2 = 1$, $2-2 = 0$ — не корень. $x = 1.5$: $\log_2 1.5 \approx 0.585$, $2-1.5 = 0.5$ — близко, но не равно. На самом деле корень $x \approx 1.75$? Проверим: $x = 1.7$: $\log_2 1.7 \approx 0.766$, $2-1.7 = 0.3$ — не совпадает. Графически видно, что уравнение имеет один корень около $x \approx 1.5$. Но точное значение не нужно для решения неравенства.

Заметим, что левая часть возрастает, правая убывает. Значит, если при каком-то x выполняется равенство, то для меньших x левая часть меньше, а правая больше, и наоборот.

Подбором найдём, что при $x = 2$: $\log_2 2 = 1$, $2-2 = 0$, значит $\log_2 x > 2-x$. При $x = 1$: $\log_2 1 = 0$, $2-1 = 1$, значит $\log_2 x < 2 - x$.

Таким образом, неравенство выполняется при $x < x_0$, где x_0 — корень уравнения. Приближённо $x_0 \approx 1.5$.

Ответ: $x \in (0; x_0)$, где x_0 — корень уравнения $\log_2 x = 2 - x$.

Пример 4

Неравенство с произведением логарифмов

Решим неравенство:

$$\log_2 x \cdot \log_2(x-1) < 0$$

ОДЗ: $x > 1$.
Произведение двух множителей меньше нуля, когда они имеют разные знаки.
Рассмотрим знаки каждого множителя:

- $\log_2 x > 0$ при $x > 1$, $\log_2 x < 0$ при $0 < x < 1$ (но это не входит в ОДЗ).
- $\log_2(x-1) > 0$ при $x - 1 > 1 \Rightarrow x > 2$, $\log_2(x-1) < 0$ при $0 < x-1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$.

Таким образом:

- При $1 < x < 2$: $\log_2 x > 0$, $\log_2(x-1) < 0$ — произведение отрицательное.
- При $x > 2$: оба множителя положительные — произведение положительное.

Неравенство выполняется при $1 < x < 2$.
Ответ: $x \in (1; 2)$.

Пример 5

Неравенство с логарифмом и тригонометрической функцией

Решим неравенство:

$$\log_2(\sin x) > -1$$

ОДЗ: $\sin x > 0$.
По определению: $\sin x > 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
Решаем тригонометрическое неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ на интервалах, где $\sin x > 0$:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$.

Пример 6

Неравенство с логарифмом и степенью

Решим неравенство:

$$x^{\log_2 x} < 4$$

ОДЗ: $x > 0$.

Прологарифмируем обе части по основанию 2 (при $x > 0$ это допустимо):

$$\log_2(x^{\log_2 x}) < \log_2 4$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 x < 2$$

$$(\log_2 x)^2 < 2$$

$$-\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2}$$

Так как $\sqrt{2} \approx 1.414$, то:

$$2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}$$

Ответ: $x \in \left(2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

Задачи

1. Решите квадратичные неравенства относительно логарифма:

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 > 0$

2) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 < 0$

3) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \geq 0$

4) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$

5) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 > 0$

6) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 < 0$

7) $\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) + 2 > 0$

8) $\log_3^2(x+2) - 2\log_3(x+2) - 3 < 0$

9) $\log_5^2(x-2) - 4\log_5(x-2) + 3 \geq 0$

2. Решите неравенства с логарифмами и корнями:

1) $\log_2 x > \sqrt{x-1}$

2) $\log_2 x < \sqrt{x-1}$

3) $\log_3 x > \sqrt{x}$

4) $\log_3 x < \sqrt{x}$

5) $\log_5 x > \sqrt{x-2}$

6) $\log_5 x < \sqrt{x-2}$

7) $\log_2 x \geq \sqrt[3]{x-1}$

8) $\log_3 x \leq \sqrt[4]{x+1}$

9) $\log_5 x \geq \sqrt[3]{x-2}$

3. Решите неравенства с логарифмами и показательными функциями:

1) $\log_2 x > 2 - x$

2) $\log_2 x < 2 - x$

3) $\log_3 x > 3 - x$

4) $\log_3 x < 3 - x$

5) $\log_5 x > 4 - x$

6) $\log_5 x < 4 - x$

7) $\log_2 x + 2^{\log_2 x} > 3$

8) $\log_3 x + 3^{\log_3 x} < 4$

9) $\log_5 x + 5^{\log_5 x} \geq 6$

4. Решите неравенства с произведением логарифмов:

1) $\log_2 x \cdot \log_2(x-1) < 0$

2) $\log_2 x \cdot \log_2(x-2) > 0$

3) $\log_3 x \cdot \log_3(x-1) > 0$

4) $\log_3 x \cdot \log_3(x-2) < 0$

5) $\log_5 x \cdot \log_5(x-1) \geq 0$

6) $\log_5 x \cdot \log_5(x-2) \leq 0$

7) $\log_2 x \cdot \log_3 x > 0$

8) $\log_2 x \cdot \log_3 x < 0$

9) $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x > 0$

5. Решите неравенства с логарифмами и тригонометрическими функциями:

1) $\log_2(\sin x) > -1$

2) $\log_2(\sin x) < -1$

3) $\log_3(\cos x) > 0$

4) $\log_3(\cos x) < 0$

5) $\log_5(\operatorname{tg} x) > 0$

6) $\log_5(\operatorname{tg} x) < 0$

7) $\log_2(\sin x) \geq \log_2(\cos x)$

8) $\log_3(\sin x) \leq \log_3(\cos x)$

9) $\log_5(\sin x) > \log_5(\cos x)$

6. Решите неравенства повышенной сложности:

1) $x^{\log_2 x} < 4$

2) $x^{\log_2 x} > 4$

3) $x^{\log_3 x} < 9$

4) $x^{\log_3 x} > 9$

5) $x^{\log_5 x} < 25$

6) $x^{\log_5 x} > 25$

7) $\log_2 x + \log_3 x > 1$

8) $\log_2 x + \log_4 x < \log_8 x$

9) $\log_2 x \cdot \log_3 x > \log_4 x$

10) $\log_2^2 x + \log_2 x^2 - 3 < 0$

11) $\log_3^2 x + 2\log_3 x^3 - 7 > 0$

12) $\log_5^2 x - 3\log_5 x^5 + 4 \leq 0$

Практика по блоку 5

Теория

В этом блоке мы изучили смешанные уравнения и неравенства, содержащие логарифмы вместе с другими функциями:

- Уравнения, содержащие логарифмы и другие функции (глава 18)
- Неравенства, содержащие логарифмы и другие функции (глава 19)

Основные методы решения:

- Сведение к квадратным заменой переменной
- Использование монотонности функций
- Метод подбора корней
- Метод интервалов с учётом ОДЗ
- Логарифмирование обеих частей

В этой главе собраны задачи на все эти типы вперемешку. Ваша задача — определить, какой метод нужно применить в каждом конкретном случае.

Задачи

1. Решите уравнения, сводящиеся к квадратным:

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

2) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$

3) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$

4) $\log_2^2(x-1) - 3\log_2(x-1) + 2 = 0$

5) $\log_3^2(x+2) - 2\log_3(x+2) - 3 = 0$

6) $\log_5^2(x-2) - 4\log_5(x-2) + 3 = 0$

7) $\log_2 x + \log_4 x = 3$

8) $\log_3 x + \log_9 x = 2$

9) $\log_5 x + \log_{25} x = 2$

2. Решите уравнения с логарифмами и корнями:

1) $\log_2 x = \sqrt{x-1}$

2) $\log_3 x = \sqrt{x}$

3) $\log_5 x = \sqrt{x-2}$

4) $\log_2 x = \sqrt[3]{x-1}$

5) $\log_3 x = \sqrt[4]{x+1}$

6) $\log_5 x = \sqrt[3]{x-2}$

7) $\log_2 x = \sqrt{x} - 1$

8) $\log_3 x = \sqrt{x} - 2$

9) $\log_5 x = \sqrt{x} + 1$

3. Решите уравнения с логарифмами и показательными функциями:

1) $\log_2 x = 3 - x$

2) $\log_3 x = 4 - x$

3) $\log_5 x = 2 - x$

4) $\log_2 x + 2^{\log_2 x} = 3$

5) $\log_3 x + 3^{\log_3 x} = 4$

6) $\log_5 x + 5^{\log_5 x} = 6$

7) $2^{\log_2 x} \cdot \log_2 x = 2$

8) $3^{\log_3 x} \cdot \log_3 x = 6$

9) $5^{\log_5 x} \cdot \log_5 x = 10$

4. Решите неравенства, сводящиеся к квадратным:

1) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 > 0$

2) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 < 0$

3) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \geq 0$

4) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$

5) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 > 0$

6) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 < 0$

7) $\log_2 x + \log_4 x > 3$

8) $\log_3 x + \log_9 x < 2$

9) $\log_5 x + \log_{25} x \geq 2$

5. Решите неравенства с логарифмами и корнями:

1) $\log_2 x > \sqrt{x-1}$

2) $\log_2 x < \sqrt{x-1}$

3) $\log_3 x > \sqrt{x}$

4) $\log_3 x < \sqrt{x}$

5) $\log_5 x > \sqrt{x-2}$

6) $\log_5 x < \sqrt{x-2}$

7) $\log_2 x \geq \sqrt[3]{x-1}$

8) $\log_3 x \leq \sqrt[4]{x+1}$

9) $\log_5 x \geq \sqrt[3]{x-2}$

6. Решите неравенства с логарифмами и показательными функциями:

1) $\log_2 x > 2 - x$

2) $\log_2 x < 2 - x$

3) $\log_3 x > 3 - x$

4) $\log_3 x < 3 - x$

5) $\log_5 x > 4 - x$

6) $\log_5 x < 4 - x$

7) $\log_2 x + 2^{\log_2 x} > 3$

8) $\log_3 x + 3^{\log_3 x} < 4$

9) $\log_5 x + 5^{\log_5 x} \geq 6$

7. Решите неравенства с произведением логарифмов:

1) $\log_2 x \cdot \log_2(x-1) < 0$

2) $\log_2 x \cdot \log_2(x-2) > 0$

3) $\log_3 x \cdot \log_3(x-1) > 0$

4) $\log_3 x \cdot \log_3(x-2) < 0$

5) $\log_5 x \cdot \log_5(x-1) \geq 0$

6) $\log_5 x \cdot \log_5(x-2) \leq 0$

7) $\log_2 x \cdot \log_3 x > 0$

8) $\log_2 x \cdot \log_3 x < 0$

9) $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_4 x > 0$

8. Решите уравнения и неравенства повышенной сложности:

1) $\log_2(\log_3 x) = 1$

2) $\log_3(\log_2 x) = 2$

3) $\log_5(\log_2 x) = 0$

4) $x^{\log_2 x} = 4$

5) $x^{\log_3 x} = 9$

6) $x^{\log_5 x} = 25$

7) $x^{\log_2 x} < 4$

8) $x^{\log_3 x} > 9$

9) $x^{\log_5 x} \leq 25$

10) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

11) $\log_2 x + \log_4 x = \log_8 x$

12) $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_4 x$

Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Логарифмы — это тема, которая многих пугает в начале изучения. Странное обозначение, новые свойства, непонятно, зачем это вообще нужно... Но теперь вы знаете, что логарифмы — это просто другой способ записи показательных уравнений, а все их свойства логически вытекают из свойств степеней.

В этой книге мы разобрали все основные приёмы работы с логарифмическими выражениями:

- начали с самого простого — определения логарифма и основного логарифмического тождества;
- научились вычислять логарифмы единицы, основания и степеней основания;
- познакомились с десятичными и натуральными логарифмами;
- изучили основные свойства: логарифм произведения, частного, степени и корня;
- освоили формулу перехода к новому основанию и её следствия;
- научились упрощать сложные выражения, комбинируя разные свойства;
- разобрались с приведением логарифмов к одному основанию;
- поработали с выражениями, содержащими натуральные логарифмы;
- научились доказывать логарифмические тождества;
- и наконец, освоили сравнение логарифмов — важный навык для решения неравенств.

Но главное — мы научились главному: видеть, какое свойство нужно применить в каждом конкретном случае. Потому что в реальных примерах никто не пишет «используйте свойство логарифма произведения» или «здесь нужно привести к одному основанию». Вы просто видите выражение и должны сами понять, как его упростить. И чем больше у вас опыта, тем быстрее приходит это понимание.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз, порешайте дополнительные задачи. Математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость.

А если вам понравился такой формат — теория, примеры, много задач — у меня есть и другие книги. На сайте books.mrepetitor.com вы найдёте пособия по разным темам школьной математики и физики. Там же есть научно-популярные книги, которые я писал для тех учеников, кому интересно не только решать задачи, но и понимать, как устроен окружающий мир, как развивалась наука и какие люди стояли за великими открытиями.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ. Если чувствуете, что нужна помощь, или хотите подготовиться к экзаменам — обращайтесь!

Желаю вам успехов в учёбе, побольше интересных задач и удовольствия от их решения!

Дмитрий Трепачёв